स्थिति विज्ञान तथा गति विज्ञान

(Statics and Dynamics)

भाग १

स्थिति विज्ञान

स्थिति विज्ञान

तथा

गति विज्ञान

रचयिता

एस० एल० लोनी

भाग १

स्थिति विज्ञान

अनुवादक

आनन्द स्वरूप सिन्हा, एम० ए०

अध्यक्ष, गणित विभाग तथा वाइस-प्रिन्सिपल,

डी० ए० वी० कॉलेज, देहरादून



मैकमिलन एण्ड कम्पनी, लिमिटेड

२९४, बहूबाजार स्ट्रीट, कलकत्ता

१९६०

MACMILLAN AND COMPANY LIMITED
LONDON BOMBAY CALCUTTA MADRAS MELBOURNE

THE MACMILLAN COMPANY OF CANADA LIMITED
TORONTO

ST MARTIN'S PRESS INC
NEW YORK

First Edition 1953
Revised Edition 1960

MADE AND PRINTED IN INDIA BY BRUCE PA
t. s. s. D. PRESS, 95 B, CHITTARANJAN AVENUE,

पहले भाग का प्राक्कथन

इस पुस्तक की रचना करने में मेरा लक्ष्य यह रहा है कि जूनियर विद्यार्थियों के लिये स्थिति विज्ञान पर एक उचित पाठ्य पुस्तक हो।

पुस्तक में उदाहरण बड़ी संख्या में हैं, जिनमें अधिकतर—घर्षण के अध्याय के अन्त में और पुस्तक के अन्त में विविध उदाहरणमाला में दिये गये उदाहरणों को छोड़कर—सब सरल हैं।

मैंने जहाँ तक सम्भव हुआ है पुस्तक को पूर्ण बनाने का प्रयत्न किया है, तथापि विद्यार्थी को चाहिये कि प्रथम अध्ययन में पुष्पांकित भागों को छोड़ दें।

मैं अपने मित्र सिडने ससेक्स कॉलेज, केम्ब्रिज के लेक्चरार श्री एच० सी० रोबसन, एम० ए० का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के प्रूफों को पढ कर तथा बहुमूल्य सुझाव देकर मेरी सहायता की है।

यदि किन्ही अशुद्धियों की सही अथवा सुधार के लिये सुझाव दिये जायेंगे तो मैं उन्हे कृतज्ञता पूर्वक स्वीकार करूँगा।

बारनीस, एस० डब्लू०
दिसम्बर १८९०

एस० एल० लोनी

दशम संस्करण का प्राक्कथन

पुस्तक में कुछ परिवर्तन किया गया है, और मुझे आशा है कि इस संस्करण में पहले से कुछ उन्नति हुई है। लेखा-चित्रीय हल कुछ पहले रख दिये गये हैं और लेखाचित्रीय रीतियों का समस्त पुस्तक में अधिक प्रयोग किया गया है। प्रयोगात्मक भाग अधिक बढ़ा दिया गया है।

कर्म के अध्याय को कुछ पहले रख दिया गया है और कर्म के सिद्धान्त पर अधिक जोर डाला गया है।

वैश्लेपिक प्रमाणों को अन्तिम अध्याय मे रख दिया गया है और वैकल्पिक प्रमाण देने में जिनमे चल राशि कलन का प्रयोग होता है मैंने सकोच नही किया ।

इस पुस्तक के दस नये चित्रों के लिये मैं डा० आर० टी० ग्लेजब्रुक की उदारता का बहुत आभारी हूँ जिन्होंने मुझे अपनी स्थिति विज्ञान की पुस्तक के ब्लाकों के प्रयोग करने की आज्ञा दे दी । इनमे से अधिकाश चित्रों मे यह विशेष गुण है कि वे केम्ब्रिज की कैवेन्डिश प्रयोगशाला में प्रचलित यथार्थ यन्त्रो से खीचे गये है ।

रॉयल हॉलोवे कॉलेज,
इगलफील्ड, सरे ।
जुलाई, १९०६

एस० एल० लोनी

अनुवादक का वक्तव्य

भारत के स्वतंत्र होने पर ज्ञान-विज्ञान और शिक्षा के प्रसार के लिये आज अंग्रेजी तथा अन्य भाषाओं के ग्रन्थों के राष्ट्रभाषा, हिन्दी, मे अनुवाद की आवश्यकता आ पडी है । शिक्षा-संस्थाओं तथा विद्यालयों में हिन्दी-माध्यम द्वारा तभी शिक्षा दी जा सकती है जब विद्यार्थियों की आवश्यकता के अनुसार पर्याप्त सख्या में ग्रन्थों के हिन्दी अनुवाद उपस्थित किये जायें । इसी अभाव की पूर्ति के लिये एस० एल० लोनी लिखित स्थिति विज्ञान का अनुवाद उपस्थित किया जा रहा है । अनुवाद के इस प्रथम संस्करण में अक्षर तथा अंक अंग्रेजी में ही रखे गये है क्योंकि यह परिवर्तन काल है और इस समय ऐसा ही उपयुक्त जान पड़ता है । जहाँ तक सम्भव हो सका है पारिभाषिक शब्द अन्तर्राष्ट्रीय ही रखे गये है । हाई स्कूल की कक्षाओं तक अब तक शिक्षा का माध्यम हिन्दी ही रहने के कारण रेखागणित तथा बीजगणित के पारिभाषिक शब्दों से विद्यार्थियों को पूर्ण परिचय है इसलिये

इन्हीं हिन्दी परिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है और इनके अतिरिक्त जो नए पारिभाषिक शब्द पहली बार प्रयुक्त किये गये हैं उनके अंग्रेजी भाषान्तर शब्द कोष्ट में साथ ही साथ दिये गये हैं। आशा है प्रस्तुत अनुवाद विद्यार्थियों के लिये लाभदायक सिद्ध होगा।

अनुवाद करने में ऐसे अनेक शब्द आये हैं जिनके हिन्दी खोजने में बड़ी कठिनाइयां पड़ी हैं। इस कार्य में मुझे अपने मित्र श्री हर नारायण मिश्र तथा काशी नागरी-प्रचारिणी सभा द्वारा हिन्दी वैज्ञानिक कोष से विशेष सहायता मिली है। इसके हेतु मैं इनको हार्दिक धन्यवाद देता हूँ।

देहरादून
सितम्बर ३१, १९५३

आनन्द स्वरूप सिन्हा

विषय-सूची

स्थिति विज्ञान

पारिभाषिक शब्दों की सूची

Abscissa	भुज
Action	क्रिया
Adjacent	संलग्न
Admissible	ग्राह्य
Analytical method	वैश्लेषिक विधि
Angular point	कोणीय विन्दु
Apparatus	यन्त्र
Apparent	स्पष्ट ; प्रतीपमान
Applied	व्यावहारिक
Arbitrary	अनियत
Arc	चाप
Arm	भुजा
Attraction	आकर्षण
Axis	अक्ष
Balance	तुला
Balanced	समतुलित
Balance, spring	स्प्रिंग तुला ; कमानीदार काँटा
Bar	दंड
Beam	छड़ ; कड़ी
Block	गुटका
Body	पिंड
Bounding surface	सीमान्त पृष्ठ
Calculus, Integral	चलराशि कलन
Centre of gravity	गुरुत्व-केन्द्र
Centre of Inertia	जड़त्व-केन्द्र

Centre of mass	जाड्य-केन्द्र
Centroid	मध्य केन्द्र, केन्द्र
Chord	चाप
Circular	वृत्ताकार ; वृत्तीय
Combination	संचय
Commensurable	नियमित
Common balance	साधारण तुला
Component force	अवयव बल
Compound the forces	बल संयोजन करना
Concave	नतोदर
Concavity	नतोदरत्व
Cone	शंकु
Conical	शंक्वाकार
Connected rigidly	दृढ़ता से जुड़े हुये ; सम्बद्ध
Consecutive	क्रमागत
Constant (adj.)	स्थायी
Constrained body	नियंत्रित पिंड
Construction, graphical	लेखा-चित्रीय रचना
Contact	स्पर्श
Continuous	अविच्छिन्न, लगातार
Converge	संसृत होना
Converse	विलोम
Conversely	विलोमतः
Convex	उन्नतोदर
Convexity	उन्नतोदरत्व
Coplanar forces	समतलीय बल
Corollary	उपसाध्य

Couple	बलयुग्म
Crane	क्रेन
Cross-section	अनुप्रस्थ परिच्छेद
Curved surface	वक्र-पृष्ठ
Cylinder	बेलन
Cylindrical	बेलनाकार
Density	घनत्व
Diagonal	विकर्ण
Diagonal Scale	कर्ण मापनी
Disc	मडल
Displacement	स्थानान्तर
Diverge	अपसृत होना
Dotted line	बिन्दुमय रेखा
Dynamical	गत्यात्मक
Dynamics	गति विज्ञान
Edge	कोर
Effective force	फलवत् बल
Efficiency	दक्षता
Effort	प्रयास
Elastic	स्थिति-स्थापक
Elastic strings	स्थिति-स्थापक तार
Elasticity, modulus of	स्थिति-स्थापन-मापक
Element	अल्पांश, छोटा भाग
Eliminate	लुप्त करना
Ennunciation	प्रतिज्ञा
Equilibrium	समतुलन
Equilibrium, neutral	उदासीन संस्थिति

Equilibrium, stable	स्थायी संस्थिति
Equilibrium, unstable	अस्थायी संस्थिति
Equilibrium, to be in	समतुलित होना
Equivalent	तुल्य
Escribed circle	वाह्य वृत्त
Experiment	प्रयोग
Experimental law	प्रयोगात्मक नियम
Experimental proof	प्रयोगात्मक प्रमाण
Extensible	तन्य
Extension	वितान
External forces	वाह्य वल
Fixed	नियत
Force	वल
Force of compression	सपीडन वल
Forces, composition of	वल संयोजन
Forces, like parallel	सम समानान्तर वल
Forces, parallelogram of	वल समानान्तर चतुर्भुज
Forces, polygon of	वल वहुभुज
Forces, triangle of	वल त्रिभुज
Forces, unlike parallel	विषम समानान्तर वल
Free end	मुक्त सिरा
Freely jointed	मुक्त सयुत
Friction	घर्षण
Frictional	घर्षणीय
Friction, angle of	घर्षण-कोण
Friction, co-efficient of	घर्षण-गुणक
Friction, cone of	घर्षण-शंकु

Friction, limiting ...	सीमान्त घर्षण
Frustum of a cone ...	छिन्न-शंकु
Fulcrum	आलम्ब
Funicular polygon ...	सयोग बहुभुज
General . ..	सामान्य ; साधारण
General formula .	व्यापक सूत्र
Generalised	व्याप्तिकृत
Generating line	जनक-रेखा
Geometrical progression	गुणोत्तर श्रेणी
Geometry, analytical ..	वैश्लेषिक ज्यामिति
Graduated scale ...	अशांकित मापनी
Grain	ग्रेन
Graphically	लेखा-चित्र द्वारा
Graphical representation	लेखा-चित्रीय प्रति-दर्शन
Gravity	गुरुत्व
Gravity, centre of ...	गुरुत्व-केन्द्र
Harmonically divided ...	हरात्मकत विभाजित
Harmonical progression	हरात्मक श्रेणी
Hexagon	षडभुज
Hinge	कब्ज़ा
Homogeneous body ...	समांशिक पिंड
Hook	आंकड़ा
Hoop	छल्ला
Horizontal	क्षैतिज
Hypotenuse	कर्ण
Hypothesis	कल्पना
Illustration	उदाहरण

Inclined plane	आनत तल; आनत धरातल
Incommensurable	अनियमित
Inextensible	अतन्य
Infinitesimal	अत्यल्प
Initial position	आदि स्थान
Inscribed circle	अन्त वृत्त
Intercepted	अन्त. खंडित
Intersection	छेदन
Invariable	अपरिणम्य
Inversely proportional	उत्क्रमानुपाती
Inverse ratio	व्युत्क्रम निष्पत्ति, व्युत्क्रमानुपात
Investigation	अन्वेषण
Irregular	विषम
Jointed freely	मुक्त सयुत
Kinetics	गत्यात्मक विज्ञान
Lamina	पटल
Lever	लीवर
Line of greatest slope	महत्तम ढाल-रेखा
Load	भार
Logarithm	लघुगणक
Loop	पाश
Machine	मशीन
Magnitude	परिमाण
Mass (quantity)	मात्रा
Material bodies	पार्थिव पदार्थ
Matter	द्रव्य
Mean	मध्यमान

Measure	... ...	माप
Mechanical advantage		यान्त्रिक लाभ
Mechanics	... ...	यन्त्र-विज्ञान
Moment	... ...	घूर्ण
Motion	... ...	गति
Motion, uniform	..	समान गति
Negligible	... .	उपेक्षणीय
Neutralise	... ..	निराकरण
Notation	... ...	सकेत
Obtuse angle	... ...	अधिक कोण
Octagon	... ...	अष्ट भुज
Opposite force	... ...	विरुद्ध बल
Original	... ...	मौलिक
Orthocentre	... ...	लाम्बिक केन्द्र
Parallelepiped	... ...	समानान्तर षडफलक
Parallelepiped, rectangular		समकोणीय समानान्तर षडफलक
Particle	... ...	कण
Path	... ...	मार्ग
Pentagon	... ...	पचभुज
Physical meaning	...	भौतिक अर्थ
Pivot	.. ...	चूल
Plot	... ...	अंकित करना
Plumb-line	... ...	गुनिया
Plummet	... ...	गुनिया
Point of application	...	प्रयोग-बिन्दु
Pointer	... ..	सूचक
Polygon, funicular	...	संयोग बहुभुज

Power	.. ...	सामर्थ्य
Power arm	..	शक्ति भुजा
Power, horse	...	अश्व-सामर्थ्य
Practical	...	क्रियात्मक
Pressure	. ...	दबाव
Principle of work	...	कर्म का सिद्धान्त
Prism	.. ...	समपार्श्व
Prism, triangular	..	त्रिकोणाधार समपार्श्व
Progression, arithmetical		समान्तर श्रेणी
Proof	.. ...	प्रमाण
Proportion	... ...	अनुपात
Pulley	... .	घिरनी
Pulley, differential	..	अन्तरीय घिरनी
Pulleys, first system of	..	घिरनियों की प्रथम श्रेणी
Pulleys, second system of		घिरनियों की द्वितीय श्रेणी
Pulleys, third system of	...	घिरनियों की तृतीय श्रेणी
Pyramid	..	सूची-स्तम्भ
Quantity	.. ...	परिमाण; राशि
Radiate	..	विकीर्ण करना
Reaction	... ...	प्रतिबल, प्रति-क्रिया
Reaction, normal	...	अभिलम्ब प्रतिबल
Real	... ...	वास्तविक
Reciprocal	... ...	व्युत्क्रम
Reduce	... ...	परिणत करना
Re-entrant angle	.. ...	अन्तः प्रविष्ट कोण
Relative	... ...	आपेक्षिक
Repel	.. ...	प्रतिसारित करना

Replace	... ...	स्थानापन्न होना
Representation	... ...	प्रतिदर्शन
Resistance	... ...	प्रतिरोध
Resolve	... ..	विश्लिष्ट करना
Resolved parts	... ..	विश्लिष्ट भाग
Resolution of forces	...	बल-विश्लेषण
Rest	.. ...	निश्चलता
Result	... .	परिणाम
Resultant force	. ..	लब्ध बल, परिणामी बल
Rhombus	... ...	सम चतुर्भुज
Right cone	.. ..	सम शंकु
Rigid	... ...	दृढ
Rod	.. ...	दंड
Rotational (motion)	...	भ्रमण गति
Rotation, axis of ...	...	परिभ्रमणाक्ष
Rough	... ...	रूक्ष
Scale pan	... ...	पलड़ा
Screw	... ...	पेंच ; स्क्रू
Screw, differential	..	अन्तरीय पेच
Screw, pitch of the	...	पेंच का पिच
Screw, thread of the	...	पेंच की चूड़ी
Section	... ...	परिच्छेद
Sector of a circle ...	...	वृत्तकला, द्वैत्रिज्य
Sensitive balance ...	...	सूक्ष्मग्राही तुला
Sensitiveness	... ...	सूक्ष्मग्राह्यता
Shell	.. ...	कवच
Similar	... ...	समरूप

Socket	आधार ; प्रकोष्ठ
Solid	पिंड; ठोस
Sphere	गोलक, गोल
Spherical	गोलीय
Spherical sector	गोलक का द्वैत्रिज्य
Spiral	सर्पिल
Spiral spring	सर्पिलाकार कमानी
Squared paper	वर्गाङ्कित पत्र
Stable	स्थायी
Statical	स्थिति सम्बन्धी
Statics	स्थिति विज्ञान
Steam	वाष्प
Steelyard	विषम-भुज तुला
Strain	विक्रिया
Stress	दबाव
Sub-division	प्रविभाजन
Successive	उत्तरोत्तर; क्रमागत
Successively	उत्तरोत्तर
Support	आलम्बन
Surface	पृष्ठ; तल
Surface, curved	वक्र-पृष्ठ
Suspension, point of	आलम्बन-बिन्दु
Symmetrical	सममित्
Symmetry	सममिति
System	समुदाय
System of forces	बल-समुदाय
Tension	तनाव

Tetrahedron	...	चतुष्फलक
Theoretical	...	सैद्धान्तिक
Theory	...	सिद्धान्त
Thrust	...	दबाव
Torque	..	घूर्णक
Transmissibility	...	संचारकत्व
Transmission	...	संचारण ; प्रेषण
Trapezoid	...	समलम्ब
Unequal	...	विषम
Uniform	...	सम, इकसार
Unknown	..	अज्ञात , अव्यक्त
Unlimited	..	असीम
Unstable	...	अस्थायी
Variation	...	परिणमन
Velocity	...	वेग
Vertical	...	ऊर्ध्वाधर
Volume	...	आयतन
Wedge	...	टंक
Weighing, double	...	द्विक तोलन
Weight	...	भार
Wheel and axle	...	चक्र धुरी
Wheel and axle, differential		अन्तरीय चक्र और धुरी
Work	...	कर्म
Work, principle of	...	कर्म का सिद्धान्त
Work, virtual	...	काल्पनिक कर्म
Zone of the sphere	...	गोलक का कटिबन्ध

स्थिति विज्ञान

अध्याय १

भूमिका

१–**द्रव्य** (Matter) के उस अंश को जो प्रत्येक दिशा में सीमित है **पिंड** (Body) कहते है।

२–**बल** (Force) उसे कहते है जो किसी पिंड की निश्चल स्थिति तथा समान गति को बदलता है अथवा बदलने में प्रवृत्त होता है।

३–**निश्चलता** (Rest). कोई पिंड निश्चल स्थिति मे उस समय कहलाता है जब वह चारों ओर की वस्तुओं के सापेक्ष अपने स्थान को नही बदलता।

४–**स्थिति विज्ञान** (Statics) वह विज्ञान है जो निश्चल पिंडों पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है, जब कि वे इस प्रकार के होते है कि पिंड निश्चल रहते है।

उस विज्ञान को जो गतिशील पिंडो पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है **गति विज्ञान** (Dynamics) कहते है।

पारिभाषिक-शब्दावली और आधुनिक परिपाटी में उस विज्ञान को जो पिंडों पर बलों की क्रिया के सम्बन्ध में विचार करता है गति विज्ञान (Dynamics) कहते है, और इसके दो उपविभाग है : स्थिति विज्ञान (Statics) जो निश्चल स्थिति में पिंडो पर, और गत्यात्मक विज्ञान (Kinetics), जो गतिशील पिंडों पर बलो की क्रियाओं के सम्बन्ध में विचार करते है।

५–द्रव के उस अंश को, जो आकार में अत्यन्त छोटा है अथवा जो हमारे अनुसंधान के लिये इतना छोटा है कि उसके भिन्न भिन्न भागों के बीच की दूरियाँ नगण्य मानी जा सकती है, **कण** (Particle) कहते है।

कोई पिंड बहु संख्या में कणों के अत्यन्त छोटे छोटे अंशों का संग्रह माना जा सकता है।

६–दृढ़ पिंड (Rigid Body) वह पिंड है जिसके भिन्न भिन्न भाग एक दूसरे के सापेक्ष सदा अपरिवर्तनशील स्थिति में रहते हैं।

कण की धारणा के समान यह धारणा भी काल्पनिक है। प्रकृति में कोई पिंड ऐसा नहीं है जिसे पूर्णतया दृढ कहा जा सके। प्रत्येक पिंड जब उस पर बल का प्रयोग किया जाता है कुछ खिंच जाता है चाहे थोड़ा ही क्यों न हो। यदि लकड़ी के किसी दंड (rod) के एक सिरे को दृढ़ता से गाड़ दिया जाय और दूसरे सिरे को खींचा जाय तो लकड़ी थोड़ी सी खिंच जाती है; यदि दंड लोहे का हो तो खिंचाव बहुत कम होता है।

सरलता के लिये हम यह मान लेंगे कि पिंड जिन पर हम विचार करेंगे पूरे दृढ हैं।

७–समतुल्य बल (Equal Forces). जब किसी कण पर दो बलों का प्रयोग विपरीत दिशाओं में किया जाय और कण निश्चल रहे, तो उन्हें समतुल्य अथवा बराबर बल कहते हैं।

८–मात्रा (Mass). पिंड में द्रव्य के परिमाण को मात्रा कहते हैं। इंगलैंड में मात्रा की इकाई को एक पौंड (pound) माना है, जो इक्सचेकर आफिस (Exchequer Office) में रखे हुये प्लैटिनम के एक टुकड़े की मात्रा के बराबर है।

अतः किसी पिंड की मात्रा दो, तीन, चार,....पौंड कही जाती है जब उसमें उस प्लैटिनम के टुकड़े का दो, तीन, चार,.. गुना द्रव्य होता है।

फ्रांस तथा अन्य विदेशों में मात्रा की इकाई को एक ग्राम (gramme) माना है, जो लगभग 15·432 ग्रेन (grains) के बराबर है। व्यावहारिक इकाई एक किलोग्राम (1000 ग्राम) है, जो लगभग 2·2046 पौंड के बराबर है।

९–भार (Weight). भार से हरएक परिचित है। हम सब जानते

हैं कि किसी पिंड को पृथ्वी पर गिरने से रोकने के लिये कुछ परिश्रम की आवश्यकता होती है। पृथ्वी हरएक पिंड को अपनी ओर उस बल से आकर्षित करती है जो, जैसा कि हम गति विज्ञान में देखेंगे, पिंड की मात्रा के अनुपातीय है।

वह बल, जिससे पृथ्वी किसी पिंड को अपनी ओर आकर्षित करती है, पिंड का भार कहलाता है।

१०–बल की माप। हम स्थिति विज्ञान मे बल की इकाई को एक पौंड मानेंगे। इसलिये बल की इकाई उस बल के बराबर है जो एक पौंड की बे रोक लटकी हुई मात्रा को ठीक थाम सकता है।

हम गति विज्ञान में दिखलायेगें कि एक पौंड का भार पृथ्वी के भिन्न भिन्न स्थानों पर भिन्न भिन्न होता है।

स्थिति विज्ञान में हमें पृथ्वी के भिन्न भिन्न स्थानों पर बलों की तुलना नहीं करनी होगी, अत: एक पौंड के भार का यह परिवर्तन व्यावहारिक रूप से आवश्यक नहीं है; इसलिये हम उस परिवर्तन को छोड़ देंगे और एक पौंड के भार को स्थिर मानेंगे।

११–"एक पौंड के भार" का संक्षिप्त, स्थिति विज्ञान में, "एक पौंड" है। इसलिये विद्यार्थी को समझ लेना चाहिये कि "10 पौंड के बल" से तात्पर्य उस "बल से है जिसका भार 10 पौंड" है।

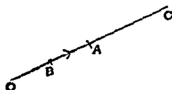
१२–बलों को सरल रेखाओं से प्रदर्शित किया जाता है। बल पूर्णत: उस समय मालूम हो जाता है जब हमें (१) उसका परिमाण, (२) उसकी दिशा, और (३) उसका प्रयोग बिन्दु अर्थात् पिंड का वह बिन्दु जहाँ पर बल का प्रयोग किया गया है, मालूम हों।

अत. हम किसी बल को उसके प्रयोग बिन्दु से खींची गई एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित कर सकते है, क्योंकि किसी सरल रेखा में परिमाण और दिशा दोनों ही होती है।

उदाहरणार्थ : मान लो सरल रेखा OA उस बल को प्रदर्शित करती है जो बिन्दु O पर लगाया गया है और जिसका भार 10 पौंड है,

तो 5 पौंड भार का उसी दिशा में लगाया गया बल OB से प्रदर्शित होगा, जहाँ पर B, OA की दूरी को समविभाजित करता है, और 20 पौंड भार का बल OC से प्रदर्शित होगा जहाँ पर OA इस प्रकार बढ़ाई गई है कि AC, OA के बराबर है।

बल के लगाये जाने की दिशा को बहुधा बाण के फल के चिन्ह से प्रदर्शित करते हैं।



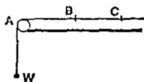
१३–बल के उपविभाग। जब किसी बल का किसी पिंड पर प्रयोग किया जाता है तो उसके तीन भिन्न रूप होते हैं: (१) आकर्षक बल (attraction), (२) वितति बल अथवा तनाव (tension), और (३) प्रतिबल (reaction).

१४–आकर्षक बल। आकर्षक बल वह बल है जो एक पिंड दूसरे पर, बिना किसी दृश्यमान यंत्र के और बिना एक दूसरे को अनिवार्य रूप से स्पर्श किये ही, प्रयोग करता है। इस प्रकार का एक मात्र उदाहरण, जिसका हम इस पुस्तक में वर्णन करेंगे, वह बल है जिससे पृथ्वी किसी पिंड को अपनी ओर आकर्षित करती है। यह आकर्षक बल (धारा ९) उस पिंड का भार कहलाता है।

१५–तनाव। यदि हम डोरी के एक सिरे को पिंड के किसी बिन्दु पर बाँध दें और दूसरे सिरे को खीचें तो हम पिंड पर बल का प्रयोग करते हैं; ऐसे बल को, जो किसी डोरी अथवा दण्ड के द्वारा लगाया जाता है, तनाव कहते हैं।

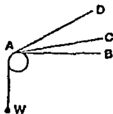
यदि डोरी हल्की है (अर्थात् उसका भार इतना कम है कि उसे नगण्य माना जा सकता है) तो जो बल डोरी द्वारा लगाया जाता है वह सारी लम्बाई में वही रहता है।

उदाहरणार्थ, यदि भार W एक हल्की डोरी द्वारा, जो एक मेज के चिकने सिरे के ऊपर होकर गुजरती है, थामा जाय तो मालूम किया गया है कि चाहे डोरी के किसी भी बिन्दु A, B, अथवा C पर बल का प्रयोग क्यों न किया जाय, बल वही रहता है।



चूँकि भार को थामने के लिये A पर लगाया गया बल प्रत्येक स्थिति में वही रहता है, इसलिये यह स्पष्ट है कि डोरी के किसी भी बिन्दु पर तनाव का प्रयोग क्यों न किया जाय परिणाम में कोई अन्तर नहीं होता और इसलिये डोरी की सारी लम्बाई में तनाव वही रहता है।

पुनः, यदि भार W, एक हल्की डोरी द्वारा जो किसी चिकनी खूँटी A के ऊपर होकर गुजरती है, थामा जाय तो यह मालूम किया गया है कि चाहे डोरी किसी भी दिशा (AB, AC, अथवा AD) में क्यों न खींची जाय, उसके दूसरे सिरे पर लगाया गया बल वही रहता है और यह बल W के बराबर होता है।



[इन बलों को डोरी के मुक्त सिरे को स्प्रिंग तुला (कमानीदार तराजू) मे बाँध कर नापा जा सकता है।]

अतः उस हल्की डोरी का तनाव जो किसी चिकनी खूँटी के ऊपर होकर गुजरती है, डोरी की सारी लम्बाई में वही रहता है।

यदि दो अथवा दो से अधिक डोरियाँ एक दूसरे से गाँठ द्वारा बँधी हों तो प्रत्येक डोरी में तनाव अनिवार्य रूप से वही नही रहता।

विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि किसी डोरी का तनाव उसकी लम्बाई का अनुपाती नही होता। यह समझना कि जितनी लम्बी डोरी हो उतना ही अधिक तनाव होता है साधारण भूल है। यह ठीक है कि यदि डोरी अधिक बड़ी हो तो हम अधिक सुविधा से बल का प्रयोग कर

सकते हैं और इसलिये नौसिखिया यह मान लेता है कि अधिक बड़ी डोरी का अधिक तनाव होता है।

१६–प्रतिबल। *यदि कोई पिंड किसी दूसरे पिंड के सहारे झुका हो अथवा उससे दबा हुआ हो तो प्रत्येक पिंड स्पर्श-बिन्दु पर एक बल का अनुभव करता है जिसे प्रतिबल कहते हैं।*

वह बल जिसका प्रयोग एक पिंड दूसरे पर करता है उस बल अथवा प्रतिबल के विपरीत होता है जिसका प्रयोग दूसरा पिंड पहले पर करता है।

यह बात न्यूटन के तीसरे गति नियम (Newton's Third Law of Motion) में बतलाई गई है (भाग २, धारा ७३)।

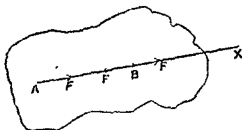
उदाहरण। यदि कोई सीढ़ी किसी दीवार के सहारे झुकी हो तो सीढ़ी के सिरे से दीवार पर जिस बल का प्रयोग होता है, वह उस बल के बराबर तथा विपरीत होता है जिसका प्रयोग दीवार सीढ़ी के सिरे पर करती है।

यदि लकड़ी के किसी घन को मेज पर रखें तो वह बल जिसका प्रयोग वह मेज पर करता है उस बल के बराबर तथा विपरीत होता है जिसका प्रयोग मेज उस पर करती है।

१७–समतुलन (Equilibrium). यदि एक पिंड पर दो अथवा दो से अधिक बल कार्य कर रहे हों परन्तु पिंड निश्चल स्थिति में रहे तो वे सब बल समतुलित कहलाते हैं।

१८–दो बराबर तथा विपरीत बलों का प्रवेश-अथवा पृथक करना। हम इस बात को मान लेंगे कि यदि किसी दृढ़ पिंड के किसी बिन्दु पर हम दो बराबर तथा विपरीत बलों को लगायें तो उनका पिंड की समतुलित अवस्था पर कोई प्रभाव नहीं होता; इसी प्रकार एक पिंड के किसी बिन्दु पर यदि दो बराबर तथा विपरीत बल कार्य कर रहे हों तो उन्हें हटाया जा सकता है।

१६–बल के प्रेषण (Transmissibiliny) का नियम । यदि कोई बल एक दृढ़ पिंड के किसी बिन्दु पर कार्य कर रहा हो तो उसे उसकी रेखा के किसी दूसरे बिन्दु पर कार्य करता हुआ समझा जा सकता है यदि यह पिछला बिन्दु पिंड से दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध हो ।



मान लो कोई बल F एक पिंड के किसी बिन्दु A पर AX दिशा में कार्य कर रहा है । AX पर कोई बिन्दु B लो और B पर दो बराबर तथा विपरीत बल, जिनमें से प्रत्येक F के बराबर है, BA और BX दिशाओं में कार्य करते हुये लगाओ। इनका पिंड के समतुलन पर कोई प्रभाव नहीं होगा ।

A पर AB दिशा में कार्य करता हुआ बल F और B पर BA दिशा में कार्य करता हुआ बल F, बराबर और विपरीत है, इसलिये हम यह मान सकते हैं कि वे एक दूसरे का निराकरण करते हैं अथवा एक दूसरे के प्रभाव को नष्ट करते है और इसलिये वे हटाये जा सकते हैं ।

इस प्रकार हमारे पास B पर BX दिशा में कार्य करता हुआ बल F रह जाता है और इसका प्रभाव वही है जो A पर मौलिक बल F का है ।

पिंड में आंतरिक बल भिन्न होंगे जबकि बलों का प्रयोग A अथवा B पर होगा । इस पुस्तक मे हम आंतरिक बलों पर विचार नहीं करेंगे ।

२०–चिकने पिंड । यदि हम लकड़ी के एक चिकने पालिस किये हुये समतल टुकड़े को किसी यथाशक्ति चिकनी मेज पर रखें और उस

टुकड़े को मेज के धरातल पर खिसकाने का यत्न करें तो हमें कुछ प्रतिरो का अनुभव होगा। अतः लकड़ी के टुकड़े और मेज के धरातल के बीच हमेशा एक बल होगा चाहे वह कितना ही कम क्यों न हो।

यदि उपर्युक्त दोनों पिण्ड पूरे चिकने हो तो लकड़ी के टुकड़े औ मेज के बीच मे मेज के धरातल के समानान्तर कोई बल नही होगा। उनके बीच का एक-मात्र बल मेज पर लम्ब होगा।

परिभाषा। जब परस्पर स्पर्श करते हुये दो पिंड पूर्णतः चिकने हों तो उनके बीच का बल अथवा प्रतिबल-स्पर्श बिन्दु पर उनके उभयनिष्ठ धरातल पर लम्ब होता है।

अध्याय २

बल-संयोजन तथा बल-विश्लेपण

(Composition and Resolution of Forces)

२१–मान लो कि लकड़ी का एक चपटा टुकड़ा चिकनी मेज पर रखा हुआ है और वह तीन डोरियों से, जो उसके तीन कोनों पर बँधी हुई है, इस प्रकार खींचा जा रहा है कि डोरियाँ क्षैतिज तल में हैं, और यदि डोरियों के तनाव इस प्रकार व्यवस्थित हैं कि लकड़ी का टुकडा निश्चल रहता है तो तीनों बल समतुलित होते हैं।

अतः बलों में से कोई दो बल मिलकर उस बल के बराबर कार्य करते हैं जो तीसरे बल के बराबर तथा विपरीत होता है। यह बल, जो तीसरे बल के बराबर तथा विपरीत है, पहले दो बलों का परिणामी अथवा लब्ध बल कहलाता है।

२२–**परिणामी बल** (Resultant). **परिभाषा**। यदि दो अथवा दो से अधिक बल P, Q, S, ... एक दृढ पिंड पर लगाये जायँ, और यदि एक ऐसा एक मात्र बल, R, मालूम हो जाय, जिसका प्रभाव पिंड पर वही है जो P, Q, S,... का है, तो यह एकमात्र बल R उन बलों का परिणामी अथवा लब्ध बल कहलाता है और बल P, Q, S, ...बल R के अवयव बल (Components) कहलाते हैं।

परिभाषा से यह परिणाम निकलता है कि यदि R के बराबर तथा विपरीत किसी बल को पिंड पर लगाया जाय, तो पिंड पर कार्य करने वाले बल समतुलित होते हैं, इसके विलोमतः यदि किसी पिंड पर कार्य करने वाले बल समतुलित हों तो उनमें से प्रत्येक शेष बलों के परिणामी के बराबर तथा विपरीत होता है।

२३—एक ही सरल रेखा में कार्य करते हुये बलों का परिणामी बल।

यदि दो बल एक पिंड पर एक ही दिशा में कार्य करें तो उनका परिणामी बल उनके योग के बराबर होता है; जैसे 5 और 7 पौंड भार के एक ही दिशा में कार्य करते हुये दो बल उसी दिशा में कार्य करते हुये 12 पौंड भार के एक बल के बराबर होते हैं।

यदि दो बल एक पिंड पर विपरीत दिशाओं में कार्य करे तो उनका परिणामी बल उनका अन्तर होता है और बड़े बल की दिशा की ओर कार्य करता है; जैसे 9 और 4 पौंड भार के विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये दो बल दोनों बलों में से पहले बल की दिशा की ओर कार्य करते हुये 5 पौंड भार के एक बल के बराबर होते है।

२४—जब दो बल किसी दृढ़ पिंड के एक बिन्दु पर भिन्न भिन्न दिशाओं में कार्य करें तो उनका परिणामी बल निम्न प्रकार मालूम किया जा सकता है।

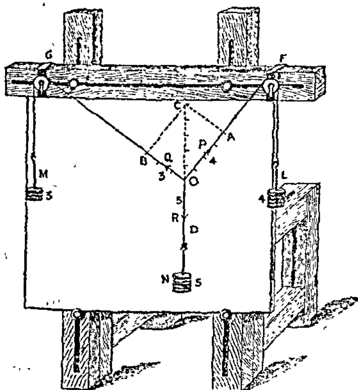
साध्य। बल-समानान्तर-चतुर्भुज (Parallelogram of Forces). यदि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये दो बल, परिमाण और दिशा में, किसी समानान्तर चतुर्भुज के एक शीर्ष से खींची गई दो भुजाओं से प्रदर्शित किये जावें तो उनका परिणामी बल, परिमाण और दिशा में, उस शीर्ष से खींचे गये विकर्ण से प्रदर्शित होता है।

स्थिति विज्ञान के इस मूल साध्य का अथवा उसके दूसरे रूप 'बल त्रिभुज' (Triangle of Forces) (धारा ३६) का प्रथम बार ब्रिजेज के स्टेवीनस ने १५८६ ई० में वर्णन किया था। उनके जीवन काल से पहले स्थिति विज्ञान लीवर के नियम (Principle of the Lever) पर आधारित था।

अगली धारा में हम प्रयोगात्मक प्रमाण देंगे। इसका मौलिक प्रमाण अन्तिम अध्याय में दिया गया है।

इस पुस्तक के दूसरे भाग के धारा ७२ में न्यूटन के गति नियम पर आधारित प्रमाण दिया गया है।

२५–प्रयोगात्मक प्रमाण (Experimental Proof). मान लो F और G किसी नियत आलम्बन से लगी हुई दो हल्की घिरनियाँ (pulleys) हैं, और मान लो उनके ऊपर होकर गुज़रती हुई दो हल्की डोरियाँ एक दूसरे से O पर बँधी हुई हैं और उनके सिरों पर L और M दो पलड़े हैं।



एक और डोरी O पर बँधी हुई है और एक तीसरे पलड़े N को थामे हुये है।

इन पलड़ों में ज्ञात भार रक्खे हुये हैं और सम्पूर्ण समुदाय समतुलित अवस्था में है। मान लो पलड़ों में रक्खे हुये भार पलड़ों के भार-सहित क्रम से P, Q, और R पौंड हैं।

समुदाय के पीछे एक ब्लैकबोर्ड अथवा कागज के टुकड़े पर रेखायें OF, OG, और ON, जैसा कि चित्र मे दिखलाई गई हैं, खींचो।

किसी उचित पैमाने को (जैसे तीन इंच अथवा उससे कम को एक पौंड) मान कर OA, OB, और OD को P, Q, और R पौंड प्रदर्शित करते हुये चिन्ह लगा दो। समानान्तर-चतुर्भुज $OACB$ को पूरा करो। तो OC लम्बाई मे OD के बराबर और दिशा में उसके विपरीत होगी।

परन्तु चूंकि P, Q, और R संतुलित है, इसलिये R, P और Q के परिणामी बल के बराबर तथा विपरीत होगा।

इसलिये P और Q का परिणामी बल OC से अर्थात् उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण से प्रदर्शित होता है जिसकी भुजायें P और Q को प्रदर्शित करती हैं।

यह फल हमेशा सही रहेगा चाहे P, Q, और R के आपेक्षिक प्रमाण कुछ ही क्यों न हों और यदि उनमें से कोई एक शेष दो के योग से बड़ा हो।

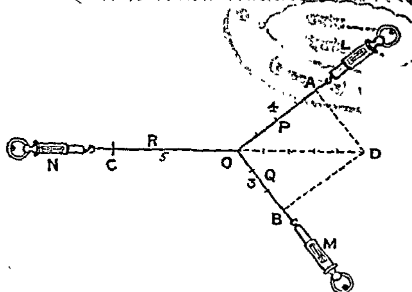
चित्र में P, Q, और R क्रम से 4, 3, और 5 पौंड के बराबर माने गये हैं। और चूंकि $5^2 = 4^2 + 3^2$, इसलिये AOB एक समकोण है।

इस प्रयोग को करने में सम्भव है कि बिन्दु O एक दूसरे के निकट भिन्न भिन्न स्थानों पर हटाया जा सके। इसका कारण यह है कि हम घिरनियों के चूलों पर के घर्षण को बिलकुल दूर नहीं कर सकते हैं। यदि घिरनियों के व्यास बड़े हों तो इस घर्षण का प्रभाव कम हो जायगा। ऐसे प्रयोगों मे ऐलुमीनियम की घिरनियाँ अच्छी होती हैं क्योंकि वे विस्तार में बड़ी और भार मे हल्की होती हैं।

साधारण प्रयोगों में ऐसे ठोस यन्त्रों की, जैसे कि चित्र में दिखलाये गये है, आवश्यकता नहीं होती। घिरनियो F और G मे छेद किये जा सकते है जिनमे होकर कीलें ऊर्ध्वाधर ब्लैक बोर्ड पर गाड़ी जा सकती हैं।

पूर्वोक्त प्रयोग में घिरनियों और भारों की जगह तीन स्प्रिंग तुलाओं का प्रयोग भी किया जा सकता है। इन तुलाओं में एक सूचक होता है जो एक अंशांकित फलक पर ऊपर-नीचे घूम कर सिरे की कटिया पर लगाये हुये बल को प्रदर्शित करता है।

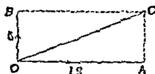
O पर बँधी हुई तीन हल्की डोरियाँ स्प्रिंग तुलाओं के सिरों से बांध दी जाती हैं। फिर तीनों तुलाओं को खींच कर किसी क्षैतिज मेज पर रख देते हैं और मेज पर कटियों अथवा कीलों द्वारा नियत कर देते



हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है। इस प्रकार तुलाओं द्वारा बतलाये जाने वाले परिमाण तीनों डोरियों के तनाव P, Q, और R को सूचित करते हैं। पिछले प्रयोग की भाँति हम OA, OB, और OC, P, Q, और R को प्रदर्शित करते हुये कोई उचित पैमाना मान कर खींचते हैं, और इस बात की जाँच करते हैं कि OC लम्बाई में OD के, जो उस समानान्तर चतुर्भुज का विकर्ण है जिसकी आसन्न भुजायें OA और OB हैं, बराबर हैं और दिशा में उसके ठीक विपरीत है।

२६–दो बलों के परिमाणी बल की दिशा और परिमाण मालूम करने के लिये हमें उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण की दिशा और परिमाण मालूम करने होते हैं जिसकी दो आसन्न भुजायें दोनों बलों को प्रदर्शित करती है।

उदाहरण १। 12 पौ० और 5 पौ० भार के उन दो बलों का परिणामी बल मालूम करो जो एक दूसरे से समकोण बनाते हुये लगे हैं।



मान लो OA और OB बलों को प्रदर्शित करती है और यह लम्बाई में 12 और 5 इकाइयों के बराबर है। आयत $OACB$ को पूरा करो।

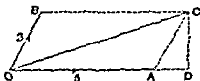
अब $OC^2 = OA^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169.$

$$\therefore\ OC = 13.$$

और $$\text{स्पज्या } COA = \frac{AC}{OA} = \frac{5}{12}.$$

अत: परिणामी बल 13 पौ० भार के बराबर है जो पहले बल से वह कोण बनाता है जिसकी स्पर्शज्या $\frac{5}{12}$ है, अर्थात् जो 22° 37′ के बराबर है।

उदाहरण २। 5 पौ० और 3 पौ० भार के दो बलों का परिणामी बल मालूम करो जो एक दूसरे से 60° का कोण बनाते हुये काम करते हैं।



मान लो OA और OB बलों को प्रदर्शित करते हैं और यह लम्बाई में 5 और 3 इकाइयों के बराबर हैं, और मान लो कोण $AOB = 60°$.

समानान्तर चतुर्भुज $OACB$ को पूरा करो और CD को OA पर लम्ब डालो। अब OC वाञ्छित परिणामी बल को प्रदर्शित करेगा।

चूंकि $AD = AC$ कोज्या $CAD = 3$ कोज्या $60° = \frac{3}{2}$;

$$\therefore \; OD = \frac{13}{2}.$$

और $DC = AC$ ज्या $60° = 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore \; OC = \sqrt{OD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{49} = 7,$$

और स्पर्ज्या $COD = \frac{DC}{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{13} = \cdot 3997$.

अतः परिणामी बल 7 पौ॰ भार के बराबर है और वह OD से जो कोण बनाता है उसकी स्पर्शज्या ·3997 है।

प्राकृतिक स्पर्शज्याओं की सारिणी से यह कोण 21°47′ के बराबर निकल आयगा।

२७—P और Q दो बलों का परिणामी बल R, जो एक दूसरे से कोण α बनाते हैं, त्रिकोणमिति द्वारा भी मालूम किया जा सकता है।

मान लो OA और OB, P और Q बलों को, जो एक दूसरे से कोण α बनाते हैं, प्रदर्शित करते हैं। समानान्तर चतुर्भुज $OACB$ को पूरा करो और OA पर, यदि आवश्यकता हो तो बढ़ाये जाने पर, CD लम्ब डालो।

मान लो R परिणामी बल के परिमाण को प्रदर्शित करता है।

$\therefore \; OD = OA + AD = OA + AC$ कोज्या DAC

$= P + Q$ कोज्या $BOD = P + Q$ कोज्या α

[यदि D, O और A के बीच में हो जैसा कि दूसरे चित्र में है, तो

$= OA - DA = OA - AC$ कोज्या DAC

$= P - Q$ कोज्या $(180° - \alpha) = P + Q$ कोज्या α]

और $DC = AC$ ज्या $DAC = Q$ ज्या a.

$\therefore\ R^2 = OC^2 = OD^2 + CD^2$

$= (P + Q \text{ कोज्या } a)^2 + (Q \text{ ज्या } a)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ कोज्या } a.$

$\therefore\ \mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{P^2 + Q^2 + 2PQ} \text{ कोज्या } a}$ ....(१),

और स्पज्या $COD = \dfrac{DC}{OD} = \dfrac{Q \text{ज्या } a}{P + Q \text{कोज्या } a}$ ....(२).

इन दोनों समीकरणों से परिणामी वल का परिमाण और उसकी दिशा मालूम हो जाती है।

उपसाध्य १। यदि बल एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो $a = 90°$, इसलिये $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, और स्पज्या $COA = \dfrac{Q}{P}$.

उपसाध्य २। यदि प्रत्येक बल P के बराबर है, तो

$$R = \sqrt{P^2(1 + 1 + 2 \text{ कोज्या } a)} = P\sqrt{2(1 + \text{कोज्या } a)}$$

$$= P\sqrt{2.2 \text{ कोज्या}^2 \frac{a}{2}} = 2P \text{ कोज्या } \frac{a}{2},$$

और स्पज्या $COA = \dfrac{P \text{ ज्या } a}{P + P \text{ कोज्या } a} = \dfrac{2 \text{ ज्या } \frac{a}{2} \text{कोज्या } \frac{a}{2}}{2 \text{ कोज्या}^2 \frac{a}{2}} = \text{स्पज्या } \dfrac{a}{2}$ ।

अतः दो बराबर बराबर बलों का परिणामी वल उनके बीच के कोण को समविभाजित करता है ; यह बात प्रारम्भिक मूलों से भी स्पष्ट है।

उदाहरणमाला १

१। निम्न सात प्रश्नों में P और Q वे दो अवयव बल हैं जिनके बीच का कोण α है और जिनका परिणामीबल R है। [अपने फलों की जांच लेखाचित्र खींच कर तथा नाप कर करो।]

(१) यदि $P=24$; $Q=7$; $\alpha=90°$; R मालूम करो।

(२) यदि $P=13$; $R=14$; $\alpha=90°$; Q मालूम करो।

(३) यदि $P=7$; $Q=8$; $\alpha=60°$; R मालूम करो।

(४) यदि $P=5$; $Q=9$; $\alpha=120°$; R मालूम करो।

(५) यदि $P=3$; $Q=5$; $R=7$; α मालूम करो।

(६) यदि $P=13$; $Q=14$; $\alpha=$ ज्या$^{-1}\frac{12}{13}$; R मालूम करो।

(७) यदि $P=5$; $R=7$, $\alpha=60°$; Q मालूम करो।

२। 12 पौ० और 8 पौ० भार के दो बलों का महत्तम और लघुतम परिणामीबल मालूम करो।

३। 3, 4, 5, और 6 पौ० भार के बल एक कण पर क्रमशः उत्तर, दक्षिण, पूर्व और पच्छिम दिशाओं में लगाये गये हैं; उनके परिणामी बल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

४। 84 और 187 पौं० भार के दो बल एक दूसरे से समकोण बनाते हुये लगे हुये हैं; उनका परिणामी बल मालूम करो।

५। P और $P\sqrt{2}$ पौ० भार के दो बल एक कण पर एक दूसरे से 135° का कोण बनाते हुये लगाये गये हैं; उनके परिणामीबल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

६। दो बलों के बीच में 60° का कोण है, और उनका परिणामी $2\sqrt{3}$ पौ० भार के बराबर है; यदि उनमें से एक बल 2 पौ० भार के बराबर है, तो दूसरे बल का परिमाण मालूम करो।

७। 13 पौं० और 11 पौं० भार के दो बलों का परिणामीबल मालूम करो जिनके बीच के कोण की स्पर्शज्या $\frac{12}{5}$ है। चित्र खींच कर अपने उत्तर की जांच करो।

०८। 10 पौं० और 9 पौं० भार के दो बलों का परिणामीबल मालूम करो बलों के बीच के कोण की स्पर्शज्या $\frac{4}{3}$ है। चित्र खींच कर अपने उत्तर की जाँच करो।

०९। दो बराबर बल एक कण पर कार्य करते हैं; उनके बीच का कोण मालूम करो जबकि उनके परिणामीबल का वर्ग उनके गुणनफल के तिगुने के बराबर है।

०१०। उन दो बलों के परिमाण मालूम करो जब कि वे एक दूसरे से समकोण बनाते हुए कार्य करते हैं तो उनका परिणामीबल $\sqrt{10}$ पौं० भार के बराबर हैं और जब वे एक दूसरे से 60° का कोण बनाते हुये कार्य करते हैं तो उनका परिणामीबल $\sqrt{13}$ पौं० भार के बराबर होता है।

०११। दो बराबर बलों P के बीच का कोण मालूम करो जबकि *उनका परिणामीबल* (१) P *के बराबर,* (२) $\frac{P}{2}$ *के बराबर है।*

१२। दो बल $(A+B)$ और $(A-B)$ कौनसा कोण बनाते हुये लगाये जायें कि उनका परिणामीबल $\sqrt{A^2+B^2}$ हो?

१३। दो बल एक कण पर कार्य करते हैं; बताओ किस दिशा में दिये हुये परिमाण का एक तीसरा बल लगाया जाय कि तीनों का परिणामीबल महत्तम हो।

१४। निम्न प्रश्नों को केवल चित्र खींचकर हल करो:

(१) यदि $P=10$; $Q=15$; $\alpha=37°$; R मालूम करो।

(२) यदि $P=9$, $Q=7$; $\alpha=133°$; R मालूम करो।

(३) यदि $P=7$; $Q=5$; $R=10$; α मालूम करो।

(४) यदि $P=7{\cdot}3$; $R=8{\cdot}7$; $\alpha=65°$; Q मालूम करो।

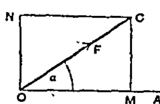
२८–दो बलों का, जिनके परिमाण और दिशायें दी हुई हैं, केवल एक ही परिणामीबल होता है; क्योंकि एक ही समानान्तर चतुर्भुज OA और OB रेखाओं को आसन्न भुजायें मानकर खींचा जा सकता है। (चित्र धारा २७)

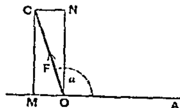
२९–किसी एक बल के दो अवयव बल अनन्त ढंग से मालूम किये जा सकते हैं, क्योंकि OC को विकर्ण मानकर समानान्तर चतुर्भुजों की रचना अनन्त संख्या मे की जा सकती है, और इनमें से प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज से अवयव बलों के जोड़े निकल आते हैं।

३०–बलों के विश्लेषण की सबसे आवश्यक स्थिति वह है जब हम किसी बल को ऐसे दो अवयव बलो मे विश्लिष्ट करते हैं जो एक दूसरे पर लम्ब हों।

मान लो हमें किसी बल F को, जो OC से प्रदर्शित किया गया है, दो ऐसे अवयव बलों में विश्लिष्ट करना है जिनमें से एक की दिशा OA है और दूसरा OA पर लम्ब है।

OA पर CM लम्ब डालो और समानान्तर चतुर्भुज $OMCN$ को पूरा करो। चूंकि OM और ON से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल OC है, इसलिये OM और ON इष्ट अवयव बल है।





मान लो कोण $AOC = \alpha$,

अब $OM = OC$ कोज्या $\alpha = F$ कोज्या α,

और $ON = MC = OC$ ज्या $\alpha = F$ ज्या α.

[यदि बिन्दु M, OA के पिछली ओर बढ़ाये जाने पर स्थित है, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो OA दिशा में F का अवयव बल $= -OM = -OC$ कोज्या $COM = -OC$ कोज्या $(180° - \alpha)$ $= OC$ कोज्या $\alpha = F$ कोज्या α.

और OA पर लम्ब अवयव बल $=ON=MC=OC$ ज्या COM $=F$ ज्या α]

अतः प्रत्येक स्थिति में, इष्ट अवयव बल F कोज्या α और F ज्या α हैं।

जैसे, 10 पौं० भार का बल, जो क्षैतिज से 60° के कोण पर कार्य करता है, क्षैतिज दिशा में 10 कोज्या 60° ($=10\times\frac{1}{2}=5$ पौं० भार) और उर्ध्वाधर दिशा मे 10 ज्या 60° ($=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\times1.732$ $=8.66$ पौं० भार) के बराबर है।

३१–परिभाषा। किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा मे विश्लिष्ट भाग (Resolved Part) वह अवयव बल है जो दी हुई दिशा की लम्ब दिशा के अवयव बल सहित दिये हुये बल के बराबर होता है।

जैसे पिछली धारा में बल F का OA दिशा मे विश्लिष्ट भाग F कोज्या α है। अतः, किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा में विश्लिष्ट भाग दिये हुये बल को उसकी और दी हुई दिशा के बीच के कोण की कोज्या से गुणा करने से प्राप्त हो जाता है।

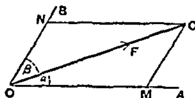
३२–किसी बल का अपनी दिशा के लम्ब दिशा मे कोई प्रभाव नहीं होता। क्योंकि कोई कारण नहीं है (चित्र धारा ३०) कि बल ON की, कण O को OA दिशा अथवा बढ़ाई हुई AO दिशा में खींचने की कोई भी प्रवृत्ति हो, अत. बल ON की कण को OA अथवा AO दिशा की ओर खींचने की प्रवृत्ति नहीं हो सकती।

उदाहरणार्थ, यदि रेल का एक डिब्बा रेल की सड़क पर खड़ा हुआ हो तो कोई भी क्षैतिज बल जो रेल की सडक की लम्ब दिशा मे लगाया जाता है उसे रेल की दिशा की ओर नहीं खींच सकता।

३३–किसी दिये हुये बल का किसी दी हुई दिशा मे विश्लिष्ट

भाग उस दिशा में बल के पूर्ण प्रभाव को प्रदर्शित करता है। क्योंकि, (चित्र धारा ३०) बल OC, ON और OM बलों से पूर्णतया प्रदर्शित हो जाता है। परन्तु बल ON का कोई प्रभाव OA दिशा में नही होता। अतः बल F का पूर्ण प्रभाव ON दिशा में OM से, अर्थात् बल के OA दिशा में विश्लिष्ट भाग से, प्रदर्शित होता है।

३४–किसी बल के अवयव बल किन्ही दो निर्दिष्ट दिशाओं में मालूम किये जा सकते हैं।



मान लो बल F के अवयव बल, जो OC से प्रदर्शित किया गया है, OA और OB दिशाओं में मालूम करते हैं, और मान लो कोण AOC और COB क्रमशः α और β है।

OB के समानान्तर CM खीचो जो OA को M पर मिले और समानान्तर चतुर्भुज $OMCN$ को पूरा करो।

अब OM और ON इष्ट अवयव बल होंगे।

चूँकि MC और ON समानान्तर हैं, इसलिये

$OCM=\beta$; और $OMC=180°-CMA=180°(\alpha+\beta)$.

चूँकि त्रिभुज OMC की भुजाये सम्मुख के कोणो की ज्याओं के समानुपाती हैं, इसलिये

$$\frac{OM}{\text{ज्या } OCM}=\frac{MC}{\text{ज्या } MOC}=\frac{OC}{\text{ज्या } OMC}.$$

$$\therefore \frac{OM}{\text{ज्या } \beta}=\frac{MC}{\text{ज्या } \alpha}=\frac{F}{\text{ज्या } (\alpha+\beta)}.$$

अतः इष्ट अवयव बल $F\frac{\text{ज्या } \beta}{\text{ज्या } (\alpha+\beta)}$ और $F\frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{ज्या} (\alpha+\beta)}$ है।

३५–विद्यार्थी को ध्यानपूर्वक स्मरण रखना चाहिये कि किसी बल के अवयव बल किन्हीं निर्दिष्ट दिशाओं में उस बल के उन्हीं दिशाओं में विश्लिष्ट भाग के बराबर नहीं होते। जैसे, F का OA दिशा में विश्लिष्ट भाग, धारा ३० से, F कोज्या α है।

उदाहरणमाला २

१। 10 पौं० भार का बल क्षैतिज से $30°$ के कोण पर कार्य करता है; क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में उसके विश्लिष्ट भाग मालूम करो।

२। बल P का विश्लिष्ट भाग उसकी दिशा से (१) $45°$ का कोण, और (२) कोज्या$^{-1}(\frac{1}{1}\frac{2}{3})$ का कोण बनाते हुये मालूम करो।

३। रेल की सड़क पर एक डिब्बा खड़ा है और उसपर 100 पौं० भार का एक क्षैतिज बल रेल की सड़क से $60°$ का कोण बनाते हुए लगाया गया है; बताओ कौनसा बल गाड़ी को आगे की ओर खींच रहा है।

४। 100 पौं० भार के बल को दो बराबर बलों में, जो एक दूसरे से $60°$ का कोण बनाते हैं, विभाजित करो। लेखाचित्र द्वारा तथा नाप कर अपने फल की जाँच करो।

५। 50 पौं० भार के बल को दो बलों में विश्लिष्ट करो जो उससे विपरीत दिशाओं में $60°$ और $45°$ के कोण बनाते हैं। लेखाचित्र द्वारा तथा नाप कर अपने फल की जाँच करो।

६। बल P के अवयव बल मालूम करो जो उससे विपरीत दिशाओं में $30°$ और $45°$ के कोण बनाते हैं।

७। यदि किसी बल P के अवयव बल उसकी दिशा से $45°$ और $15°$ के कोण बनाते हैं, तो सिद्ध करो कि दूसरा बल $\frac{\sqrt{6}}{3}P$ के बराबर है।

८। एक दिये हुए ऊर्ध्वाधर बल F के दो अवयव बल मालूम करो जिनमें से एक क्षैतिज दिशा की ओर हो और दूसरा ऊर्ध्वाधर से 60° का कोण बनाता हो।

९। यदि किसी बल के दो अवयव बलों में से एक दिये हुये बल पर लम्ब और परिमाण में उसके बराबर है, तो दूसरे अवयव बल की दिशा और उसका परिमाण मालूम करो।

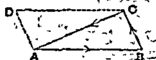
१०। यदि एक २० पौं० भार के ऊर्ध्वाधर बल के दो अवयव बलों में से एक क्षैतिज दिशा की ओर है और 10 पौं० भार के बराबर है, तो दूसरे बल का परिमाण और दिशा मालूम करो।

११। 35 पौं० भार के बल के दो अवयव बल, जो उससे विपरीत दिशाओं में 98° और 40° के कोण बनाते हैं, रचना तथा नाप द्वारा मालूम करो।

३६—बल-त्रिभुज (Triangle of Forces). यदि एक बिन्दु पर प्रयोग करते हुये तीन बल, परिमाण और दिशाओं में क्रमानुसार किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जा सकें तो वे समतुलित होते हैं।

मान लो बिन्दु O पर प्रयोग करते हुए बल P, Q और R परिमाण और दिशाओं में त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA से प्रदर्शित होते हैं, वे समतुलित होंगे।





समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ को पूरा करो।

चूँकि BC और AD बराबर और समानान्तर हैं, इसलिये जो बल BC से प्रदर्शित होता है वह AD से भी प्रदर्शित होता है।

अब AB और AD का परिणामी बल, बल समानान्तर चतुर्भुज से, AC से प्रदर्शित होता है।

अब AB, BC और CA का परिणामीबल AC और CA के परिणामीबल के बराबर है और इसलिये शून्य है।

इसलिये तीनों बल P, Q और R समतुलित है।

उपसाध्य। चूंकि AB, BC और CA से प्रदर्शित किये गये बल समतुलित है, और चूंकि, जब तीन बल समतुलित होते हैं तो उनमें से प्रत्येक शेष दो बलों के परिणामीबल के तुल्य और विपरीत होता है, इसलिये AB और BC का परिणामीबल CA के तुल्य और विपरीत होगा अर्थात् उनका परिणामीबल AC से प्रदर्शित होगा।

अत एक बिन्दु पर प्रयोग करते हुये दो बलों का परिणामीबल, जो त्रिभुज की AB और BC भुजाओं से प्रदर्शित होते हैं, तीसरी भुजा AC से प्रदर्शित होता है।

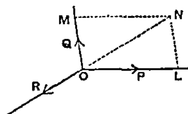
३७—बल त्रिभुजों में विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि बल, त्रिभुज की भुजाओं के, क्रमानुसार समानान्तर होने चाहियें।

जैसे, यदि पहला बल AB दिशा में कार्य करता है तो दूसरे बल को BC दिशा में और तीसरे को CA दिशा में कार्य करना चाहिये। यदि दूसरा बल BC दिशा की जगह CB दिशा की ओर कार्य करे तो बल समतुलित नहीं होंगे।

तीनों बलों को एक ही बिन्दु पर कार्य करना चाहिये; यदि बलों के कार्य करने की रेखायें BC, CA और AB हैं तो वे समतुलित नहीं होंगे, क्योंकि बल AB और BC का एक परिणामी बल होगा जो B पर कार्य करेगा और जो AC के तुल्य और समानान्तर होगा। ऐसी दशा में बल दो तुल्य और समानान्तर और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुए बलों में परिणत हो जायेंगे और जैसा कि हम एक आगे के अध्याय में देखेंगे, बलों के ऐसे जोड़े समतुलित नहीं हो सकते।

३८—बल त्रिभुज का विलोम भी सही है अर्थात् यदि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं तो वे परिमाण और दिशाओं में किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जा सकते है जो इस प्रकार खींचा गया है कि उसकी भुजायें बलों की दिशाओं के क्रमानुसार समानान्तर है।

मान लो बिन्दु O पर कार्य करते हुए तीन बल P, Q और R समतुलित हैं। P और Q की दिशाओं की ओर क्रमशः इन बलों को प्रदर्शित करती हुई OL और OM नापो।



समानान्तर चतुर्भुज $OLNM$ को पूरा करो और ON को मिला दो।

चूंकि तीनों बल P, Q और R समतुलित हैं, इसलिये इनमें से प्रत्येक शेष दो बलों के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा अतः R, P और Q के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा और इसलिये NO से प्रदर्शित होगा। और चूंकि LN, OM के बराबर और समानान्तर है, इसलिये तीनों बल P, Q और R त्रिभुज OLN की भुजाओं OL. LN और NO के समानुपाती है।

किसी भी दूसरे त्रिभुज की भुजायें, जिसकी भुजायें त्रिभुज OLN की भुजाओं के समानान्तर है, OLN की भुजाओं के समानुपाती होंगी और इसलिये बलों के भी समानुपाती होंगी।

पुनः, यदि किसी त्रिभुज की भुजायें क्रमानुसार त्रिभुज OLN की भुजाओ के लम्ब हों, तो वे त्रिभुज OLN की भुजाओं की समानुपाती और इस कारण से बलों की भी समानुपाती होंगी।

३९—पिछली धारा के साध्य मे हमें चित्र द्वारा उन तीन समतुलित बलों की सापेक्षिक दिशाओं को निर्णय करने की सरल रीति मालूम हो जाती है जिनके परिमाण दिये हुए होते हैं। हमें एक ऐसे त्रिभुज की रचना करनी होती है जिसकी भुजायें बलों के समानुपाती हैं, और ऐसा हम यूक्लेदस के १–२२ से हमेशा कर सकते हैं जबतक कि बलों में से किन्हीं दो का योग तीसरे से कम न हो।

४०—**लामी का प्रमेय** (Lami's Theorem). यदि एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हों तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के बीच के कोण की ज्या का समानुपाती होता है।

धारा ३८ के चित्र में मान लो बल P, Q और R समतुलित हैं। पहले की भाँति OL और OM लम्बाइयों को बल P और Q को प्रदर्शित करती हुई नापो और समानान्तर चतुर्भुज $OLNM$ को पूरा करो। तो NO, R को प्रदर्शित करेगा।

चूंकि त्रिभुज OLN की भुजायें सम्मुख के कोणों की ज्याओं के समानुपाती हैं, इसलिये

$$\frac{OL}{\text{ज्या } LNO}=\frac{LN}{\text{ज्या } LON}=\frac{NO}{\text{ज्या } OLN}.$$

परन्तु $\text{ज्या } LNO = \text{ज्या } NOM = \text{ज्या } (180^\circ - QOR) = \text{ज्या } QOR$,

$\text{ज्या } LON = \text{ज्या } (180^\circ - LOR) = \text{ज्या } ROP$,

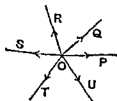
और $\text{ज्या } OLN = \text{ज्या } (180^\circ - POQ) = \text{ज्या } POQ$.

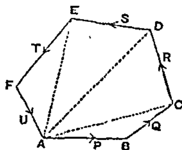
और $LN = OM$.

अतः
$$\frac{OL}{\text{ज्या } QOR}=\frac{OM}{\text{ज्या } ROP}=\frac{ON}{\text{ज्या } POQ},$$

अर्थात्
$$\frac{P}{\text{ज्या } QOR}=\frac{Q}{\text{ज्या } ROP}=\frac{R}{\text{ज्या } POQ}.$$

४१—**बल-बहुभुज (Polygon of forces).** यदि एक कण पर कार्य करते हुये कुछ बल, परिमाण और दिशाओं में किसी बहुभुज की भुजाओं से, क्रमशः प्रदर्शित किये जा सकें, तो वे समतुलित होंगे।





मान लो बहुभुज $ABCDEF$ की भुजाये AB, BC, CD, DE, EF और FA कण O पर कार्य करते हुये बलों को प्रदर्शित करती हैं। AC, AD और AE को मिला दो।

धारा ३६ के उपसाध्य से AB और BC का परिणामीबल AC से प्रदर्शित होता है।

इसी प्रकार AC और CD का परिणामीबल AD से; AD और DE का परिणामीबल AE से ; और AE और EF का परिणामीबल AF से प्रदर्शित होता है।

अतः इन सब बलों का परिणामीबल AF और FA के परिणामीबल के बराबर होगा, अर्थात् इस दशा में परिणामीबल शून्य हो जाता है।

अतः बल समतुलित है।

चाहे बल संख्या में कितने ही क्यो न हों इसी प्रकार का प्रमाण उनके लिये भी दिया जा सकता है। प्रमाण में यह भी स्पष्ट है कि यह आवश्यक नहीं है कि बहुभुज की भुजायें एक ही धरातल में हों।

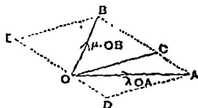
बल-बहुभुज का बिलोम सत्य नहीं है, क्योंकि यदि किसी बहुभुज की भुजाओं की दिशायें ज्ञात हों तो उनकी निष्पत्तियाँ नहीं मालूम होतीं। क्योंकि ऊपर के चित्र में हम भी AB पर कोई बिन्दु A' ले सकते हैं

और $A'F'$, AF के समानान्तर EF को F' पर मिलते हुये खींच सकते हैं; और इस प्रकार से खींचे गये नये बहुभुज $A'BCDEF'$ की भुजायें बहुभुज $ABCDEF$ की भुजाओं के क्रमशः समानान्तर होंगी परन्तु संगत भुजायें समानुपाती नहीं हैं।

४२—एक बिन्दु O पर OA और OB दिशाओं में कार्य करते हुये और $\lambda\, OA$ और $\mu\, OB$ से प्रदर्शित किये गये दो बलों का परिणामीबल $(\lambda+\mu)\cdot OC$ से प्रदर्शित होता है जहाँ पर C, AB में कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\lambda\cdot CA=\mu CB$.

मान लो AB को C इस प्रकार विभाजित करता है कि

$$\lambda\cdot CA=\mu\cdot CB.$$



समानान्तर चतुर्भुजों $OCAD$ और $OCBE$ को पूरा करो।

बल समानान्तर चतुर्भुज से बल $\lambda\cdot OA$ उन दो बलों के बराबर हैं जो $\lambda\cdot OC$ और $\lambda\cdot OD$ से प्रदर्शित होते हैं।

और बल $\mu\, OB$ उन दो बलो के बराबर है जो $\mu\, OC$ और $\mu\, OE$ से प्रदर्शित होते हैं।

अतः दोनों बल $\lambda\cdot OA$ और $\mu\cdot OB$ मिलकर एक बल $(\lambda+\mu)OC$ और बल $\lambda\cdot OD$ और $\mu\cdot OE$ के बराबर होंगे।

अतः, $\lambda.OA$ और $\mu\cdot OB$ बल मिलाकर $(\lambda+\mu)\, OC$ बल और $\lambda\cdot OD$ तथा $\mu\cdot OE$ बलों के तुल्य होंगे।

परन्तु इनमें से (चूंकि $\lambda\cdot OD=\lambda\cdot CA=\mu\cdot CB=\mu\, OE$) पिछले दो बल बराबर और विपरीत हैं और इसलिये समतुलित हैं।

अतः परिणामीबल $(\lambda+\mu)OC$ के बराबर है।

उपसाध्य। OA और OB से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामी-बल $2OC$ है, जहाँ पर C, AB का मध्य बिन्दु है।

यह इस बात से भी स्पष्ट है कि OC उस समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण OD के आधे के बराबर है जिसकी आसन्न भुजायें OA और OB हैं।

उदाहरणमाला ३

१। एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं; यदि वे एक दूसरे मे $120°$ का कोण बनाते है तो सिद्ध करो कि वे एक दूसरे के बराबर हैं।

यदि उनके बीच के कोण $60°$, $150°$ और $150°$ हैं, तो बल किस अनुपात में होंगे?

२। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल समतुलित हैं; पहले दो के बीच का कोण $90°$ का है और दूसरे और तीसरे के बीच का कोण $120°$ का है; बलों की निष्पत्तियाँ मालूम करो।

३। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल $7P, 5P$ और $8P$ समतुलित हैं; ज्यामितीय रचना द्वारा तथा गणना द्वारा पिछले दो बलों के बीच का कोण मालूम करो।

४। एक कण पर कार्य करते हुये तीन बल $5P$, $12P$ और $13P$ समतुलित हैं; ज्यामितीय रचना द्वारा तथा गणना द्वारा उनकी दिशाओं के बीच के कोण मालूम करो।

५। दो बल $2P$ और $3P$ तीसरे बल $4P$ मे जिसकी दिशा ज्ञात है, समतुलित हैं; ज्यामिति से उनकी दिशायें बताओ।

६। त्रिभुज ABC की भुजायें AB और AC, D और E पर समविभाजित होती हैं; सिद्ध करो कि BE और DC से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल परिमाण और दिशा में $\frac{3}{2}$ BC से प्रदर्शित होता है।

७। कण P पर $\lambda.AP$ और $\lambda.PB$ से प्रदर्शित किये गये बल कार्य करते हैं जहाँ पर A और B दो नियत बिन्दु हैं ; सिद्ध करो कि बिन्दु P कहीं भी क्यों न हो उनका परिणामीबल परिमाण और दिशा में स्थिर है।

८। $ABCD$ एक समानान्तर चतुर्भुज है ; एक कण P, A और C की ओर उन बलों से आकर्षित किया जाता है जो PA और PC के अनुपात में हैं और B और D से उन बलों से प्रतिसारित किया जाता है जो PB और PD के अनुपात में हैं ; सिद्ध करो कि P समतुलित होगा चाहे वह किसी भी स्थान में क्यों न हो।

निम्न प्रश्नों को ज्यामितीय रचना द्वारा हल करो। हर एक प्रश्न में P और Q कोई दो बल हैं जिनके बीच का कोण α है और जिनका परिणामीबल R, P से कोण θ बनाता है.

९। $P=25$ पौ० भार, $Q=20$ पौं० भार और $\theta=35^\circ$; R और α मालूम करो।

१०। $P=50$ कीलोग्राम, $Q=60$ कीलोग्राम और $R=70$ कीलोग्राम ; α और θ मालूम करो।

११। $P=30, R=40$ और $\alpha=130^\circ$; Q और θ मालूम करो।

१२। $P=60, \alpha=75^\circ$ और $\theta=40^\circ$; Q और R मालूम करो।

१३। $P=60, R=40$ और $\theta=50^\circ$; Q और α मालूम करो।

१४। $P=80, \alpha=55^\circ$ और $R=100$; Q और θ मालूम करो।

१५। एक नाव एक रस्सी से जो नाव की लम्बाई से 20° का कोण बनाती है, घसीटी जा रही है ; यह मानकर कि नाव पर पानी का परिणामी प्रतिबल R नाव की लम्बाई से 40° का कोण बनाता है ; और रस्सी का तनाव 5 हंडरवेट है, खींच कर नाव पर परिणामीबल मालूम करो यदि वह नाव की लम्बाई की दिशा में कार्य कर रहा हो।

उदाहरणमाला ४

१। दो बल 120° के कोण पर कार्य करते हैं। यदि बड़ा बल 80 से प्रदर्शित होता है और परिणामीबल छोटे पर लम्ब है, तो छोटा बल मालूम करो।

२। यदि दो बलों में से एक दूसरे से दुगना है और उनका परिणामी बल बड़े बल के बराबर है तो बलों के बीच का कोण मालूम करो।

३। दो बल एक कण पर एक दूसरे से समकोण बनाते हुये कार्य करते हैं; और एक तीसरे बल से जो उनमें से एक से 150° का कोण बनाता है समतुलित हो जाते हैं। दोनो बलों में से बड़ा बल 3 पौं० भार के बराबर है, शेष दो बलों के मान मालूम करो।

४। दो बलों का परिणामीबल जिनके बीच में एक समकोण का $\frac{5}{3}$ गुना कोण है छोटे अवयव बल पर लम्ब है। बड़ा बल 30 पौं० भार के बराबर है, दूसरा अवयव बल और परिणामीबल मालूम करो।

५। दो बलों के परिमाण $3:5$ की निष्पत्ति में हैं; और उनके परिणामीबल की दिशा छोटे बल से समकोण बनाती है; बड़े बल और परिणामीबल के परिमाणों की तुलना करो।

६। दो बलों का योग 18 है, और उनका परिणामीबल, जिसकी दिशा छोटे बल पर लम्ब है, 12 है, बलों के परिमाण मालूम करो।

७। यदि दो बल P और Q एक दूसरे से ऐसा कोण बनाते हुये लगाये गये हैं कि $R=P$, तो सिद्ध करो कि यदि P को दुगना कर दिया जाय तो नया परिणामीबल Q पर लम्ब होगा।

८। दो बलों P और Q का परिणामीबल $\sqrt{3}Q$ के बराबर है और P की दिशा से 30° का कोण बनाता है; सिद्ध करो कि P या तो Q के बराबर होगा या उससे दुगना होगा।

९। दो बल $2P$ और P किसी कण पर कार्य करते हैं;

यदि पहले बल को दुगना कर दिया जाय और दूसरे को 12 पौं० भार से बढ़ा दिया जाय, तो परिणामीबल की दिशा नहीं बदलती ; P का मान मालूम करो।

०१०। दो बलो P और Q का परिणामीबल, जो एक दूसरे से कोण θ बनाते हैं, $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ हैं ; यदि वे कोण $(90°-\theta)$ बनाते हैं, तो उनका परिणामीबल $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ होता है ; सिद्ध करो कि स्पज्या $\theta=\frac{m-1}{m+1}$.

०११। बल P और Q का परिणामीबल R है ; यदि Q को दुगना कर दिया जाय तो R भी दुगना हो जाता है, और यदि Q की दिशा उलट दी जाय, तो भी R दुगना हो जाता है ; सिद्ध करो कि

$$P:Q:R::\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$$

०१२। यदि दो बलों P और Q का परिणामीबल R, जिनके बीच में कोई भी कोण क्यों न हो, P की दिशा से कोण θ बनता है, तो सिद्ध करो कि $(P+R)$ और Q का परिणामीबल, जबकि उनके बीच मे वही कोण है, $(P+R)$ की दिशा से $\frac{\theta}{2}$ कोण बनायेगा।

१३। एक बिन्दु पर कार्य करते हुये तीन दिये हुये बल समतुलित हैं। यदि उनमें से एक उस बिन्दु के चारों ओर किसी दिये हुये कोण पर घुमा दिया जाय, तो रचना द्वारा तीनों बलों का परिणामीबल मालूम करो, और यदि बल का झुकाव बदलता जाय तो सिद्ध करो कि परिणामीबल का झुकाव बल के झुकाव के आधे से बदलेगा।

१४। एक बल को जिसका परिमाण और दिशा दी हुई है, दो नियत बिन्दुओं में होकर गुजरते हुये दो बराबर बलों में विश्लिष्ट करो, और इसे ज्यामितीय रचना द्वारा दिखलाओ (१) जबकि दोनों बिन्दु दिये हुये बल के एक ही ओर है, (२) जब वे विपरीत ओर है।

०१५। दो दिये हुये बल किसी पिण्ड के दो दिये हुये बिन्दुओं पर

कार्य करते हैं; यदि वे इन विन्दुओं के चारों ओर एक ही दिशा मे दो बराबर बराबर कोण बनाते हुये घुमाये जायें, तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल हमेशा किसी नियत विन्दु मे होकर गुजरेगा।

० १६। $A, B,$ और C तीन नियत बिन्दु है, और P एक ऐसा बिन्दु है कि PA और PB का परिणामीबल हमेशा C में होकर गुजरता है; सिद्ध करो कि P का विन्दुपथ एक सरल रेखा है।

१७। एक दिया हुआ बल जो एक दिये हुये बिन्दु पर किसी दी हुई दिशा मे कार्य करता है दो अवयव बलों में विश्लिष्ट किया गया है। यदि अवयव बलों की सब दिशाओं के लिये, उनमे से एक अपरिवर्तित रहता है, तो सिद्ध करो कि दूसरे बल को प्रदर्शित करनेवाली रेखा का सिरा किसी नियत वृत्त पर होगा।

० १८। सिद्ध करो कि किसी बिन्दु को एक त्रिभुज के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बलो का समुदाय उसी विन्दु को त्रिभुज के मध्य बिन्दुओ को मिलाने वाली सरल रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बलों के समुदाय के तुल्य होता है। ✓

०१९। एक चतुर्भुज के भीतर वह विन्दु मालूम करो कि जिसपर यदि उससे चतुर्भुज के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाओं से प्रदर्शित किये गये बल कार्य करें तो वह समतुलित हो। ✓

२०। चार बल चतुर्भुज $ABCD$ की भुजाओं पर लगाये गये हैं, और वे भुजाओं के समानुपाती हैं; तीन $AB, BC,$ और CD की सीध में लगाये गये है और चौथा A से D की ओर लगाया गया है; उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करो और उस विन्दु का स्थान मालूम करो जहाँ पर वह CD को मिलता है।

०२१। चतुर्भुज $ABCD$ की भुजायें BC और DA क्रमश. बिन्दु F और H पर समविभाजित होती हैं; सिद्ध करो कि किसी कण पर कार्य करते हुये दो बलों का परिणामीबल, जो AB और DC के समानान्तर और बराबर है, HF के समानान्तर होगा और $2.HF$ के बराबर होगा।

०२२। चतुर्भुज $ABCD$ की भुजायें AB, BC, CD, और DA क्रमशः E, F, G, और H पर समविभाजित होती हैं। सिद्ध करो कि किसी बिन्दु पर कार्य करते हुये बलों का परिणामीबल, जो परिमाण और दिशा में EG और HF से प्रदर्शित होते हैं, परिमाण और दिशा में AC से प्रदर्शित होगा।

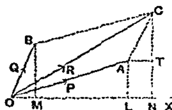
२३। एक वृत्त के भीतर, जिसका केन्द्र नियत है, किसी बिन्दु P से PA_1, PA_2, PA_3, और PA_4 सरल रेखायें परिधि तक खींची गई हैं जो सब P में होकर गुजरने वाली त्रिज्या से बराबर के कोण बनाती हैं; सिद्ध करो कि यदि यह रेखायें P से विकीर्ण करते हुये बलों को प्रदर्शित करें, तो उनका परिणामीबल वृत्त की त्रिज्या के परिमाण से स्वतंत्र होगा।

अध्याय २

बल-संयोजन तथा बल-विश्लेषण (क्रमशः)

(Composition and Resolution of Forces)

४३—किसी दी हुई दिशा में दो बलों के विश्लिष्ट भागों का योग उसी दिशा में परिणामीबल के विश्लिष्ट भाग के बराबर होता है।



मान लो OA और OB, P और Q दो बलों को प्रदर्शित करती हैं, और OC उनका परिणामीबल R है, इसलिये $OACB$ एक समानान्तर चतुर्भुज है।

मान लो OX दी हुई दिशा है। OX पर $AL, BM,$ और $CN,$ और CN पर AT लम्ब खींचो।

दोनों त्रिभुजों OBM और ACT की भुजायें क्रमशः समानान्तर हैं, और OB परिमाण में AC के बराबर है।

$$\therefore\ OM = AT = LN.$$

अत. $\quad ON = OL + LN = OL + OM$

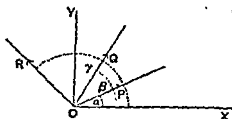
परन्तु OL, OM और ON, P, Q, और R के OX दिशा में विश्लिष्ट भागों को प्रदर्शित करते हैं।

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

इस साध्य को एक विन्दु पर कार्य करते हुये कितने ही बलों के परिणामीबल के लिये भी सिद्ध किया जा सकता है ।

४४–एक कण पर एक ही धरातल में कार्य करते हुये संख्या में कितने ही बलों का परिणामीबल मालूम करना ।

मान लो बल $P, Q, R, ..$ कण O पर कार्य करते हैं ।



O में होकर OX एक नियत रेखा खीचो, और OX पर OY एक लम्ब रेखा खींचो ।

मान लो बल $P, Q, R, ...$ OX से कोण $\alpha, \beta, \gamma, ...$ बनाते हैं ।

धारा ३० मे बल P के दिशा OX और OY में अवयव बल, क्रमशः P कोज्या α और P ज्या α हैं ; इसी प्रकार Q के अवयव बल Q कोज्या β और Q ज्या β हैं ; इसी प्रकार और बलों के लिये भी ।

अत. सब बल OX दिशा में अवयव बल P कोज्या $\alpha + Q$ कोज्या β $+ R$ कोज्या γ ... के, और OY दिशा में अवयव बल P ज्या α $+ Q$ ज्या $\beta + R$ ज्या γ .. के बराबर हैं ।

मान लो यह अवयव बल क्रम से X और Y है, और मान लो उनका परिणामीबल OX से कोण θ बनाता है ।

चूंकि F, OX पर F कोज्या θ और OY पर F ज्या θ के बराबर हैं, इसलिये पिछली धारा मे

F कोज्या $\theta = X$....................(१),

और F ज्या $\theta = Y$....................(२).

अतः वर्ग करके और जोड़ कर,

$$F^2 = X^2 + Y^2.$$

और भाग देकर, स्पज्या $\theta = \frac{Y}{X}$.

इन दोनों समीकरणों से F और θ अर्थात् इष्ट परिणामीबल का परिमाण और उसकी दिशा मालूम हो जाती है।

उदाहरण १। एक कण पर एक ही धरातल में $2, 2\sqrt{2}$, और 1 पौं० भार के तीन बल कार्य करते हैं; पहला बल क्षैतिज है, दूसरा क्षैतिज से $45°$ का कोण बनाता है, और तीसरा उर्ध्वाधर है; उनका परिणामीबल मालूम करो।

चूंकि $X = 2 + 2\sqrt{2}$ कोज्या $45° + 0 = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$,

और $Y = 0 + 2\sqrt{2}$ ज्या $45° + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 3$,

इसलिये F कोज्या $\theta = 4$, F ज्या $\theta = 3$;

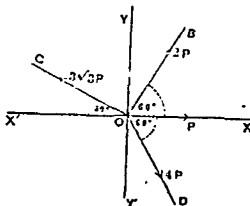
$\therefore$ $F = \sqrt{4^2 + 3^2} =$ और स्पज्या $\theta = \frac{3}{4}$.

इसलिये परिणामीबल 5 पौं० भार के बल के बराबर है, और क्षैतिज से जो कोण बनाता है उसकी स्पज्या $\frac{3}{4}$ है, अर्थात् वह कोण $36° 52'$ का है।

उदाहरण २। एक कण पर बल P, $2P$, $3\sqrt{3}P$, और $4P$ लगाये गये हैं; पहले और दूसरे के बीच की कोण दूसरे और तीसरे के बीच का कोण, और तीसरे और चौथे के बीच का कोण, क्रम से $60°$, $90°$ और $150°$ के हैं। सिद्ध करो कि इनका परिणामीबल P के बराबर है जो पहले बल से $120°$ का कोण बनाता है।

इस उदाहरण में यदि नियत रेखा OX को पहले बल P की दिशा की सीध में लें तो प्रश्न बहुत सरल हो जायगा। मान लो XOX' और YOY' एक दूसरे से समकोण बनाती हुई दो नियत रेखायें हैं।

दूसरा, तीसरा, और चौथा बल क्रम से पहले, दूसरे और चौथे पाद मे है, और $BOX=60^\circ$, $COX'=30^\circ$; और $DOX=60^\circ$.



पहले बल का OY पर कोई अवयव बल नहीं है।

दूसरा बल OX और OY पर क्रम से $2P$ कोज्या 60° और $2P$ ज्या 60° अवयव बलों के बराबर है।

तीसरा बल OX' और OY पर क्रम से $3\sqrt{3}P$ कोज्या 30° और $3\sqrt{3}P$ ज्या 30° के अर्थात् OX और OY पर $-3\sqrt{3}P$ कोज्या 30° और $3\sqrt{3}P$ ज्या 30° के बराबर है।

इसी प्रकार चौथा बल OX और OY' पर $4P$ कोज्या 60° और $4P$ ज्या 60° के अर्थात् OX और OY पर $4P$ कोज्या 60° और $-4P$ ज्या 60° के बराबर है।

अब $X = P + 2P$ कोज्या $60^\circ - 3\sqrt{3}P$ कोज्या $30^\circ + 4P$ कोज्या 60°

$$= P + P - \frac{9P}{2} + 2P = -\frac{P}{2},$$

और $Y = 0 + 2P$ ज्या $60^\circ + 3\sqrt{3}P$ ज्या $30^\circ - 4P$ ज्या 60°

$$= P\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}P - 4P\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

अतः यदि परिणामीबल F है जो OX से कोण θ बनाता है, तो

$$F=\sqrt{X^2+Y^2}=P,$$

और $$\text{स्पज्या } \theta=\frac{Y}{X}=-\sqrt{3}=\text{ स्पज्या } 120°,$$

अर्थात् परिणामीबल, बल P के बराबर है जो पहले बल की दिशा से $120°$ का कोण बनाता है।

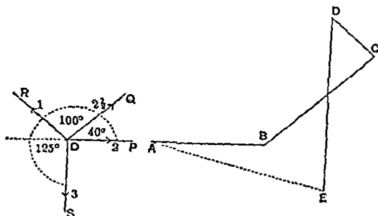
४५—लेखा-चित्रीय रचना (Graphical Construction). एक विन्दु पर कार्य करते हुये बलों के किसी समुदाय का परिणामीबल बल-बहुभुज द्वारा भी मालूम किया जा सकता है। क्योंकि (चित्र धारा ४१) किसी विन्दु O पर कार्य करते हुये और परिमाण और दिशाओं में बहुभुज $ABCDEF$ की भुजाओं से प्रदर्शित किये गये बल समतुलित होते हैं। अतः $AB, BC, CD, DE,$ और EF से प्रदर्शित किये गये बलों का परिणामीबल शेष बल FA के बराबर और उसके विपरीत होगा अर्थात् उनका परिणामीबल AF से प्रदर्शित होगा। अर्थात् किसी कण पर कार्य करते हुये बलों $P, Q, R, S,$ और T का परिणामीबल इस प्रकार मालूम किया जा सकता है:

कोई विन्दु A लो और AB, बल P के समानान्तर और उसके समानुपाती लो, और इसी प्रकार क्रम से $BC, CD, DE,$ और EF बल Q, R, S और T के समानान्तर और उनके समानुपाती लो; वाञ्छित परिणामीबल परिमाण और दिशा में AF रेखा से प्रदर्शित होगा।

यही रचना संख्या में कितने ही बलों के लिये भी की जा सकती है।

उदाहरण। 2, $2\frac{1}{2}$, 1, और 3 कीलोग्राम भार के चार बल सरल रेखा OP, OQ, OR, और OS, पर इस प्रकार कार्य करते हैं कि $\angle POQ=40°$, $\angle QOR=100°$, और $\angle ROS=125°$; उनके परिणामीबल का परिमाण और दिशा मालूम करो।

AB, OP के समानान्तर और 2 इंच के बराबर खींचो ; B से BC, OQ के समानान्तर और 2·5 इंच के बराबर खींचो, और फिर CD, OR के समानान्तर और 1 इंच के बराबर खींचो और अत में DE,



OS के समानान्तर और 3 इंच के बराबर खींचो। नापने से मालूम हुआ कि AE, 2·99 इंच के बराबर है, और $\angle BAE$, 14° से कुछ बड़ा है।

अतः परिणामीबल 2·99 कीलोग्राम भार के बराबर है और OP से 14° का कोण बनाता है।

उदाहरणमाला ५

[प्रश्न २,३,४,५, और ८ रेखा-चित्रीय रचना द्वारा किये जाने चाहिये।]

० १। 1, 2, और $\sqrt{3}$ पौं० भार के बल एक बिन्दु A पर, AP, AQ, और AR दिशाओं में लगाये गये हैं, कोण $PAQ = 60°$, और PAR एक समकोण है ; बलों का परिणामीबल मालूम करो।

० २। एक कण पर 5 पौं० और 3 पौं० भार के बल जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, और एक 4 पौं० भार का एक बल जो पहले दो बलों के बीच

के कोण को समविभाजित करता है, कार्य करते हैं; वह बल मालूम करो जो कण को निश्चल अवस्था में रखेगा।

३। तीन बराबर बल एक बिन्दु से अपसृत होते है, बीच का बल दोनों बलों से 60° का कोण बनाता है। तीनों बलों का परिणामीवल मालूम करो।

०४। तीन बल $5P, 10P,$ और $13P$ एक धरातल में एक बिन्दु पर कार्य करते हैं, और उनमें से किन्ही दो की दिशाओं के बीच का कोण 120° का है। उनके परिणामीवल का परिमाण और दिशा मालूम करो।

०५। बल $2P, 3P,$ और $4P$ एक बिन्दु पर कार्य करते हैं और उनकी दिशायें एक सम-त्रिबाहु त्रिभुज की भुजाओं के क्रमानुसार समानान्तर है; उनके परिणामीवल का परिमाण और प्रयोग रेखा मालूम करो।

६। बल $P_1, P_2, P_3,$ और P_4 एक कण पर कार्य करते हैं जो वर्ग $ABCD$ के केन्द्र O पर है; P_1 और P_2 विकर्ण OA और OB पर और P_3 और P_4 भुजाओ AB और BC की लम्बदिशा में कार्य करते हैं। यदि

$$P_1 : P_2 . P_3 : P_4 :: 4 : 6 \cdot 5 : 1,$$

तो उनके परिणामीवल का परिमाण और दिशा मालूम करो।

७। $ABCD$ एक वर्ग है; 1 पौं०, 6 पौं० और 9 पौं० भार के बल क्रमशः $AB, AC,$ और AD दिशाओं में कार्य करते हैं; उनके परिणामीवल का परिमाण दशमलव के दो अंकों तक शुद्ध मालूम करो।

०८। एक बिन्दु पर कार्य करती हुये पाँच बल समतुलित हैं; उनमें से चार बल जो परिमाण में क्रम से 4, 4, 1 और 3 पौं० भार के बराबर हैं, एक दूसरे से लगातार 60° के कोण बनाते हैं। पाँचवें बल का

परिमाण मालूम करो। खींच कर और नाप कर अपने उत्तर की जांच करो।

०९। चार बराबर बल $P, Q, R,$ और S एक धरातल में किसी कण पर कार्य करते हैं, P और Q के बीच के, Q और R के बीच के, और R और S के बीच के कोण सब बराबर हैं और P और S के बीच का कोण 108° का है। बलों का परिणामीबल मालूम करो।

०१०। 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, और 2 पौं० भार के बल किसी सम-षट्भुज के एक शीर्ष से क्रमशः शेष पाँच शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनके परिणामीबल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

०११। 2, 3, 4, 5, और 6 पौं० भार के बल एक सम-षट्भुज के एक शीर्ष से क्रमशः शेष शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनका परिणामीबल मालूम करो।

०१२। सिद्ध करो कि 7, 1, 1, और 3 पौं० भार के बलों का परिणामीबल जो एक सम पंचभुज के एक शीर्ष से क्रमशः शेष शीर्षों की ओर कार्य करता है, $\sqrt{71}$ पौं० भार के बराबर है। खींच कर और नाप कर अपने उत्तर की जांच करो।

०१३। बराबर बल P एक अष्टभुज के एक शीर्ष से शेष शीर्षों की ओर कार्य करते हैं; उनका परिणामीबल मालूम करो।

त्रिकोणमितीय सारिणी के प्रयोग से अथवा लेखा-चित्रीय रचना से निम्न बलों के परिणामीबल का परिमाण (दशमलव के दो अंकों तक) और दिशा (गणना द्वारा निकटतम मिनट तक और रचना द्वारा निकटतम अंश तक) मालूम करो।

१४। 11, 7, और 8 पौं० भार के तीन बल जो किसी नियत रेखा से 18°18′, 74°50′ और 130°20′ के कोण बनाते हैं।

१५। 4, 3, 2, और 1 पौं० भार के चार बल, जो किसी नियत रेखा से 20°, 40°, 60° और 80° के कोण बनाते हैं।

१६। 8, 12, 15, और 20 पौ० भार के चार बल, जो किसी नियत रेखा से 30°, 70°, 120°15′ और 155°, के कोण बनाते हैं।

१७। 85, 47, और 63 कीलोग्राम के तीन बल, जो OA, OB, और OC रेखाओं की सीध में कार्य करते हैं, जबकि $\angle AOB = 78°$ और $\angle BOC = 125°$.

४६—एक कण पर कार्य करते हुये संख्या मे कितने ही बलों के समतुलन के नियम मालूम करना।

मान लो, जैसा कि धारा ४४ में, बल कण O पर कार्य करते हैं।

यदि बल समतुलित हैं तो उनका परिणामीबल F शून्य के बराबर होगा। इसलिये

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

चूंकि दो वास्तविक राशियों के वर्गों का योग शून्य नहीं हो सकता जबतक कि प्रत्येक राशि पृथक पृथक शून्य न हो;

$$\therefore X = 0, \text{ और } Y = 0.$$

अतः यदि एक कण पर कार्य करते हुये बल समतुलित हैं, तो उनके विश्लिष्ट भागों के बीजीय योग, दो दिशाओं में जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, पृथक पृथक शून्य होंगे।

विलोमतः यदि बलों के विश्लिष्ट भागों के योग दो दिशाओं में, जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, पृथक पृथक शून्य हैं, तो बल समतुलित होंगे।

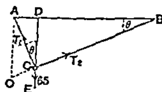
क्योंकि इस स्थिति में X और Y दोनों शून्य है, और इसलिये F भी शून्य होगा।

अतः चूंकि बलों का परिणामीबल शून्य है, इसलिये बल समतुलित होंगे।

४७—जब किसी कोण पर केवल तीन बल प्रयोग करते हों, तो समतुलन के नियम अधिक सरलता से लामी के नियम (धारा ४०) के प्रयोग करने से मालूम हो जाते हैं।

४८। उदाहरण १। 65 पौं० भार का एक पिंड 5 और 12 फुट लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है; डोरियाँ एक ही क्षितिज रेखा में दो बिन्दुओं से, जिनके बीच की दूरी 13 फुट है, बंधी हुई हैं; डोरियों के तनाव मालूम करो।

मान लो AB और AC दो डोरियाँ हैं, इसलिये $AC=5$ फुट, $BC=12$ फुट, और $AB=13$ फुट।



चूँकि $13^2=12^2+5^2$, इसलिये कोण ACB एक समकोण है।

मान लो भार की दिशा CE बढ़ाये जाने पर AB को D पर मिलती है और मान लो कोण $CBA=\theta$, तो

$$\angle ACD=90^\circ-\angle BCD=\angle CBD=\theta.$$

मान लो डोरियों के तनाव T_1 और T_2 हैं। लामी के प्रमेय से

$$\frac{T_1}{\text{ज्या } ECB}=\frac{T_2}{\text{ज्या } ECA}=\frac{65}{\text{ज्या } ACB};$$

$$\therefore \frac{T_1}{\text{ज्या } BCD}=\frac{T_2}{\text{ज्या } \theta}=\frac{65}{\text{ज्या } 90^\circ};$$

$$\therefore T_1=65 \text{ कोज्या } \theta, \text{ और } T_2=65 \text{ ज्या } \theta.$$

परन्तु $\text{कोज्या } \theta=\frac{BC}{BA}=\frac{12}{13}$, और $\text{ज्या } \theta=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$;

$$\therefore T_1=60, \text{ और } T_2=25 \text{ पौ० भार।}$$

अन्यथा प्रश्न इस प्रकार भी हल किया जा सकता है: चूँकि त्रिभुज ACB की भुजायें क्रमशः बल T_1, T_2, और 65 की दिशाओं पर लम्ब हैं,

$$\therefore \frac{T_1}{BC}=\frac{T_2}{CA}=\frac{65}{AB};$$

$$\therefore T_1=65\frac{BC}{AB}=60, \text{ और } T_2=65\frac{AC}{AB}=25.$$

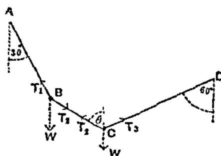
लेखा-चित्र द्वारा। BC को बढ़ाओ ताकि वह A में होकर खींची गई उर्ध्वाधर रेखा को O पर मिले। अब ACO वह त्रिभुज है जिसकी भुजायें तीनों बल T_1, T_2, और W के समानान्तर है। अतः यह बल त्रिभुज है, और

$$\therefore \frac{T_1}{AC}=\frac{T_2}{CO}=\frac{W}{OA}.$$

उदाहरण २। एक डोरी $ABCD$ दो नियत बिन्दुओं A और D पर बंधी हुई है। उसके दो बिन्दुओं B और C से दो बराबर भार W बंधे हुये है और भाग AB और CD ऊर्ध्वाधर से क्रमशः 30° और 60° के कोण बनाते हैं। डोरी के भागों के तनाव और BC का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो।

मान लो डोरियों के तनाव क्रम से T_1, T_2, और T_3 है और मान लो BC ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाता है।

[नोट–डोरी BC, B को C की ओर और C को B की ओर खींचती है, उसकी सारी लम्बाई में तनाव एक ही रहता है।]



चूंकि B समतुलित अवस्था मे है, इसलिये उस पर कार्य करते हुये बलों के ऊर्ध्वाधर अवयव बल और क्षैतिज अवयव बल पृथक पृथक शून्य होंगे (धारा ४६)।

अत: T_1 कोज्या $30^\circ - T_2$ कोज्या $\theta = W$ ....(१),

और T_1 ज्या $30^\circ - T_2$ ज्या $\theta = O$ ....(२).

इसी प्रकार, चूंकि C समतुलित अवस्था में है,

T_3 कोज्या $60^\circ + T_2$ कोज्या $\theta = W$ ....(३),

और T_3 ज्या $60^\circ - T_2$ ज्या $\theta = O$ ....(४).

(१) और (२) से, T_1 का मान रखने पर,

$$W = T_2 \left[\text{कोस्पज्या } 30^\circ \text{ ज्या } \theta - \text{कोज्या } \theta \right]$$
$$= T_2 \left[\sqrt{3} \text{ ज्या } \theta - \text{कोज्या } \theta \right] \quad \text{............(५)}.$$

और (३) और (४) से, T_3 का मान रखने पर,

$$W = T_2 \left[\text{कोस्पज्या } 60^\circ \text{ ज्या } \theta + \text{कोज्या } \theta \right]$$
$$= T_2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ज्या } \theta + \text{कोज्या } \theta \right] \quad \text{............(६)}.$$

इसलिये (५) और (६) से,

$$\sqrt{3} \text{ ज्या } \theta - \text{कोज्या } \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ज्या } \theta + \text{कोज्या } \theta \text{ ;}$$

$$\therefore \ 2 \text{ ज्या } \theta = 2\sqrt{3} \text{ कोज्या } \theta \text{ ;}$$

$$\therefore \ \text{स्पज्या } \theta = \sqrt{3}, \text{ अत } \theta = 60^\circ.$$

इस मान को (५) में रखने पर,

$$W = T_2 \left[\sqrt{3} . \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right] = T_2.$$

अत: (२) से $T_1 = T_2 \dfrac{\text{ज्या } 60^\circ}{\text{ज्या } 30^\circ} = W\sqrt{3}$,

और (४) से $T_3 = T_2 \dfrac{\text{ज्या } \theta}{\text{ज्या } 60^\circ} = T_2 = W$.

अत: BC का ऊर्ध्वाधर से झुकाव 60° का है, और भाग AB, BC और CD के तनाव क्रमश: $W\sqrt{3}$, W और W हैं।

उदाहरणमाला ६

१। दो आदमी एक भार W को दो रस्सियों से जो भार से बँधी हुई हैं, ले जा रहे हैं; एक रस्सी ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाती है और दूसरी 30° का; प्रत्येक रस्सी का तनाव मालूम करो।

२। 2 पौ० भार का एक पिंड एक 25 इंच लम्बी डोरी द्वारा किसी नियत बिन्दु से बँधा हुआ है; उस पर एक क्षैतिज बल F लगाया गया है, पिंड नियत बिन्दु से होकर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा से 20 इंच की दूरी पर स्थित है; F का मान और डोरी का तनाव मालूम करो।

३। 130 पौं० भार का एक पिंड एक क्षैतिज कड़ी से 1 फुट 4 इंच और 5 फुट 3 इंच लम्बी दो डोरियों द्वारा लटका हुआ है, डोरियाँ कड़ी से 5 फुट 5 इंच की दूरी पर दो बिन्दुओं से बँधी हुई है। डोरियों के तनाव क्या हैं?

४। 70 पौं० भार का एक पिण्ड 6 फुट और 8 फुट लम्बी दो डोरियों द्वारा एक क्षैतिज रेखा में 10 फुट की दूरी पर दो बिन्दुओं से लटका हुआ है; डोरियों के तनाव मालूम करो।

५। 60 पौ० भार का एक पिंड 9 फुट और 12 फुट लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है, डोरियों के सिरे एक क्षैतिज रेखा में 15 फुट की दूरी पर दो बिन्दुओं से बँधे हुये हैं; डोरियों के तनाव मालूम करो।

६। छत से लटकी हुई एक डोरी चार चार पौंड भार के तीन पिंडों को थामे हुये हैं, एक पिंड सबसे नीचे के सिरे पर है और शेष दो उसके सिरों से बराबर की दूरी पर हैं; डोरी के भागों के तनाव मालूम करो।

७। दो बराबर पिंड जिनमें से प्रत्येक का भार W है एक पतली डोरी के सिरों पर बँधे हुये हैं, जो दीवार पर तीन कीलों के ऊपर होकर गुजरती है; कील्ले दीवार में एक समद्विबाहु त्रिभुज के रूप में गड़ी हुई है जिसका आधार क्षैतिज है और शीर्ष कोण 120° का है; प्रत्येक कील्ले पर दबाव मालूम करो।

०८। एक नदी 96 फुट चौड़ी है और एक नाव नदी के ठीक बीचोबीच सम्मुख के किनारों पर दो आदमियों द्वारा खींची जा रही है, जिनमें से हरएक 100 पौं० भार का बल लगाता है; यदि रस्सियाँ नाव के एक ही विन्दु पर बँधी हुई है और हरएक 60 फुट लम्बी है तो नाव पर परिणामीबल मालूम करो।

९। एक डोरी के सिरों पर जो एक ही क्षैतिज धरातल में दो समानान्तर चिकने छड़ों पर होकर गुजरती है, दो समतुल्य भार बँधे हुये हैं और एक बराबर भार छड़ों के बीच में डोरी के किसी विन्दु से बँधा हुआ है; समुदाय की समतुलन की स्थिति और प्रत्येक छड़ पर दबाव मालूम करो।

०१०। एक डोरी क्षैतिज धरातल में दो बिन्दुओं से बँधी हुई है; 27 पौ० भार के एक छल्ले पर जो डोरी पर बेरोक सरक सकता है, P पौ० भार का एक क्षैतिज बल लगाया गया है। यदि समतुलित अवस्था में डोरी के भाग ऊर्ध्वाधर से 45° और 75° के कोण बनाते हैं, तो P का मान मालूम करो।

११। दो बिना भार के छल्ले एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर सरकते हैं और छल्लों में होकर एक डोरी गुजरती है जिसके दोनों सिरों पर और छल्लों के बीच में किसी एक बिन्दु पर भार बँधे हुये हैं। जब छल्ले वृत्त के सब से ऊँचे विन्दु से 30° की दूरी पर हैं तो भार समतुलित अवस्था में हैं; तीनों भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करो।

०/१२। 112 पौं० भार के दो बराबर पिंड एक डोरी से बँधे हुये हैं जो एक ही क्षैतिज धरातल में दो छोटी छोटी चिकनी खूँटियों A और B के ऊपर होकर गुजरते हैं; यदि 5 पौं० भार का एक पिंड A और B के बीचोबीच डोरी में बँधा हुआ है, तो AB को 10 फुट मान कर बताओ कि यह पिंड AB की सतह में कितने इंच नीचे उतर आयेगा।

यदि यह छोटा पिंड डोरी के किसी दूसरे बिन्दु पर बाँधा जाय तो क्या होगा ?

१३। 10 पौं० भार का एक पिंड 7 और 24 इंच लम्बी दो डोरियों से लटका हुआ है, जिनके दूसरे सिरे 25 इंच लम्बी एक छड़ के सिरों से बँधे हुये हैं। यदि छड़ को इस प्रकार थामा जाय कि पिंड उसके मध्य विन्दु के ठीक नीचे हो, तो डोरियों के तनाव मालूम करो।

१४। एक भारी जंजीर, जिसके सिरों पर 10 पौं० और 16 पौं० के भार लगे हुये हैं, एक चिकनी घिरनी के ऊपर समतुलित अवस्था में लटकी हुई है ; यदि जंजीर का महत्तम तनाव 20 पौं० भार के बराबर है तो जंजीर का भार मालूम करो।

१५। 8 फुट 9 इंच लम्बी एक भारी जंजीर, जिसका भार 15 पौं० है और जिसके एक सिरे पर 7 पौं० का एक भार लगा हुआ है, एक चिकनी घिरनी के ऊपर समतुलित अवस्था में लटकी हुई है। जंजीर की कितनी कितनी लम्बाई दोनों ओर है ?

१६। एक पिंड, जो एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्तीय तार के ऊपर बेरोक सरकता है एक डोरी द्वारा जो लम्बाई में वृत्त की त्रिज्या के बराबर है, वृत्त के सबसे ऊँचे विन्दु से बँधा हुआ है ; डोरी का तनाव और वृत्त का प्रतिबल मालूम करो।

१७। सम-चतुर्भुज के आकार के एक सम पटल का एक कोण 120° का है ; उसके केन्द्र पर विकर्णों की सीध में लगाये गये दो बल उसे इस प्रकार थामे हुये हैं कि उसकी एक भुजा क्षैतिज रहती है; सिद्ध करो कि, यदि बल P और Q हैं, जिनमें P बड़ा है, $P^2=3Q^2$.

१८। एक लगाम के सिरे दो चिकने बँधे हुये छल्लों के भीतर होकर गुजरते हैं, जबकि एक एक सिरा दहाने के एक एक ओर है। फिर वे दोहरा दिये जाते हैं और घोड़े के सिर के दोनों ओर नियत बिन्दुओं पर बाँध दिये जाते हैं। गाड़ीवान के खिचाव P से घोड़े की जबान पर दहाने से जो दवाव पड़ता है वह मालूम करो।

०१९। बिना भार की तीन बराबर बराबर डोरियाँ एक समत्रिबाहु त्रिभुज ABC के रूप में बँधी हुई हैं और A से एक भार W लटका हुआ है। यदि त्रिभुज और भार, B और C दो डोरियों से इस प्रकार थामे जायें कि BC क्षैतिज हो और प्रत्येक डोरी BC से $135°$ का कोण बनाये तो सिद्ध करो कि BC में तनाव $\frac{W}{6}(3-\sqrt{3})$ है।

२०। तीन बिना भार की डोरियाँ AC, BC, और AB इस प्रकार बँधी हुई हैं कि वे एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाती हैं जिसका शीर्ष A है। यदि C से एक भार W लटकाया जाय और BC को क्षैतिज रखते हुये सम्पूर्ण दो बलों से थामा जाय जो A और B पर के कोणों को समविभाजित करते हैं, तो AB डोरी का तनाव मालूम करो।

२१। एक बिना भार की डोरी दो बिन्दुओं से, जो एक क्षैतिज रेखा में नहीं है, लटकाई गई है और एक छोटे चिकने भारी छल्ले के भीतर होकर गुजरती है जो बिना रोक के डोरी पर सरकता है; छल्ले की समतुलित अवस्था मालूम करो।

यदि छल्ला डोरी पर बिना रोक के सरकने के बजाय किसी दिये हुये बिन्दु से बाँध दिया जाय, तो वे समीकरण मालूम करो जिससे डोरी के दोनों भागों के तनाव की निष्पत्ति मालूम हो जाय।

२२। दीवार में एक सम षट्भुज के चार सबसे ऊँचे शीर्षों पर चार खूंटियाँ गड़ी हैं (षट्भुज के सबसे नीचे के दो शीर्ष एक ही सरल क्षैतिज रेखा में हैं) और इन खूंटियों के ऊपर एक पाश, W भार को थामे हुये, डाला गया है; पाश इतना लम्बा है कि उसमें सबसे नीचे की खूंटियों पर बने हुये कोण समकोण हैं। डोरी का तनाव और खूंटियों पर दबाव मालूम करो।

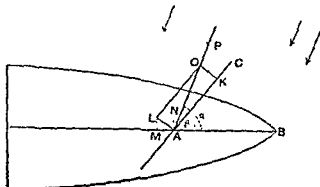
२३। व्याख्या करो कि किस प्रकार नदी की धारा के बल को किसी नाव को नदी के पार करने में उत्तेजित किया जा सकता है, जब कि नाव के केन्द्र को एक लम्बी रस्सी द्वारा नदी के बीच में किसी नियत बिन्दु से बाँधा हुआ मान लिया जाय।

२४। व्याख्या करो कि किस प्रकार किसी जहाज को वायु की दिशा के लगभग विपरीत दिशा में चलाने में समर्थ किया जा सकता है।

सिद्ध करो कि जहाज के पालों को इस प्रकार खड़ा करना चाहिये कि वे जहाज के पेंदे के पटरे और वायु की प्रतीयमान दिशा के बीच के कोण को समविभाजित करें ताकि जहाज को आगे बढ़ाने को उत्तेजित करने वाला बल अधिक से अधिक हो सके।

[मान लो AB पेंदे के पटरे की अर्थात् जहाज के गति की दिशा है, OA वायु की प्रतीयमान दिशा है, और कोण OAB जो न्यून कोण है α के बराबर है। मान लो AC जहाज के पालों की दिशा है; AC, OA और AB के बीच में है, और मान लो कोण $BAC = \theta$.

मान लो वायु का पालों पर बल P है, इस बल को पालों की दिशा और उस की लम्ब दिशा में विश्लिष्ट करो। पालों की दिशा के अवयव बल $(KA =)$ P कोज्या $(\alpha - \theta)$ का कोई प्रभाव नहीं है।



पालों की लम्ब दिशा के अवयव बल $(LA =)$ P ज्या $(\alpha - \theta)$ को फिर दो बलों अर्थात् $(NA =)$ P ज्या $(\alpha - \theta)$ कोज्या θ जो AB पर लम्ब है और $(MA =)$ P ज्या $(\alpha - \theta)$ ज्या θ जो AB की ओर है, में विश्लिष्ट करो।

पहले अवयव बल से तिरछी अर्थात् जहाज की लम्बाई की लम्ब दिशा में गति उत्पन्न होती है। इसे वायु की प्रतिकूल-दिशा में जहाज का बहाव कहते हैं और यह पेंदे के पटरे की बनावट से बहुत कम किया जा सकता है। पेंदा इस प्रकार बनाया जाता है कि इस बहाव को अधिक से अधिक प्रतिरोध हो सके।

दूसरा अवयव बल अर्थात् P ज्या $(\alpha-\theta)$ ज्या θ, जो AB की दिशा में है, कभी शून्य नहीं होता जब तक कि पाल पटरे की दिशा में अथवा वायु की दिशा में न लगाये जायें, अर्थात् जब तक कि α शून्य न हो। इस दशा में वायु जहाज की दिशा के ठीक विपरीत होती है।

इस प्रकार जहाज को आगे बढ़ाने के लिये हमेशा एक बल होता है; परन्तु वायु की जहाज को उलटा घुमाने की इस प्रवृत्ति का प्रतिकार करने के लिये पतवार का लगातार प्रयोग किया जाता है।

यह बल $=\frac{1}{2}$ P [कोज्या $(\alpha-2\theta)$ — कोज्या α], और इसलिये यह सबसे अधिक होगा जब कोज्या $(\alpha-2\theta)$ महत्तम हो, अर्थात् जब $\alpha-2\theta=0$, अर्थात् जब $\theta=\frac{\alpha}{2}$, अर्थात् जब पालों की दिशा पटरे और वायु की प्रतीयमान दिशा के बीच के कोणों को समविभाजित करती है।]

४९—लेखा-चित्रीय उदाहरण। बहुत से प्रश्न जो वैश्लेषिक विधि से हल करने में बहुत कठिन होते हैं, लेखाचित्र द्वारा आसानी से हल किये जा सकते हैं।

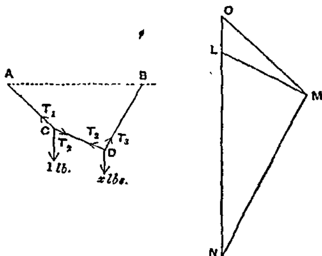
ऐसे प्रश्नों का व्यावहारिक तथा निर्माण-शास्त्र सम्बन्धी कामों में प्रायः प्रयोग होता है। प्रायः इन प्रश्नों में बल-त्रिभुज तथा बल-बहुभुज के प्रयोग के अतिरिक्त कुछ और अधिक नहीं करना होता।

इनमें जिन यन्त्रों का अधिक प्रयोग होता है वे परकार, मापनी, कर्णमापनी, और कोणों के नापने के कोणमापक हैं।

इनसे प्राप्त किये गये फल निस्सन्देह गणित के विचार से शुद्ध नहीं होते; परन्तु यदि विद्यार्थी यन्त्रों का प्रयोग सावधानी और चतुरता से करें तो साधारणतः उत्तर दशमलव के पहले अंक तक विश्वसनीय होना चाहिये।

निम्न हल किये हुये उदाहरणों में चित्र मौलिक चित्रों से छोटे करके दिये गये हैं। विद्यार्थी को चाहिये कि चित्रों को स्वयं उस पैमाने पर जो कि प्रत्येक उदाहरण में दिया गया है, फिर से खींचे।

५०—उदाहरण १। $ACDB$ एक डोरी है जिसके सिरे एकही क्षैतिज रेखा में सात फुट की दूरी पर A और B दो बिन्दुओं से बंधे हैं। AC, CD और DB की लम्बाइयाँ क्रमसे $3\frac{1}{2}$, 3 और 4 फुट हैं, और C पर एक पौंड का भार लटका हुआ है। D पर ऐसे परिमाण का एक अज्ञात भार लटका हुआ है कि समतुलन की स्थिति में CDB एक समकोण है। इस भार का परिमाण और डोरियों के तनाव मालूम करो।



मान लो T_1, T_2 और T_3 इष्ट तनाव हैं और D पर x पौं० का भार है।

OL एक इंच लम्बी ऊर्ध्वाधर रेखा लो जो C पर लटके हुये एक पौंड के भार को प्रदर्शित करती है। O से OM, AC के समानान्तर खींचो और L से LM, CD के समानान्तर खींचो।

चल त्रिभुज मे OM, T_1 को और LM, T_2 को प्रदर्शित करेंगे ।

OL को ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर बढ़ाओ और M से MN, BD के समानान्तर खीचो ।

अब चूंकि LM, T_2 को प्रदर्शित करता है, इसलिये T_3, MN से, और x, LN मे प्रदर्शित होंगे ।

नापने मे, $OM=3{\cdot}05$ इंच, $LM=2{\cdot}49$ इंच, $MN=5{\cdot}1$ इंच, और $NL=5{\cdot}63$ इंच ।

अत D पर लटका हुआ भार 5·63 पौ० और तनाव क्रम से 3·05, 2·49 और 5·1 पौ० भार के बराबर है ।

उदाहरण २ । एकही क्षैतिज रेखा में 16 फुट की दूरी पर A और B दो बिन्दु हैं; AO और OB, 6 फुट और 12 फुट लम्बी दो डोरियां हैं

A C B L 5 T_1 T_2 O 20 N M

जो O पर 20 पौंड भार के एक पिंड को साथ हुये हैं एक तीसरी डोरी जो O पर पिंड से बंधी हुई है AB के मध्य बिन्दु C पर एक छोटी घिरनी घिरनी के ऊपर होकर गुज़रती है और 5 पौंड भार के एक पिंड से बंधी हुई है; AO और OB डोरियों के तनाव मालूम करो ।

मान लो T_1 और T_2 इष्ट तनाव हैं। OC पर एक इंच के बराबर OL चिन्ह लगाओ जो डोरी OC के 5 पौं० भार के तनाव को प्रदर्शित करेगा। LM ऊर्ध्वाधरत: 4 इंच के बराबर खींचो। M से MN, OB के समानान्तर खींचो जो AO को बढ़ाये जाने पर N पर मिले।

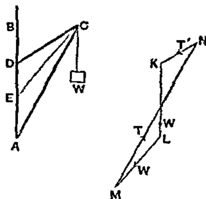
अब, बल बहुभुज से, रेखायें ON और MN तनाव T_1 और T_2 को प्रदर्शित करेंगी।

नापने से, ON और NM क्रम से 3·9 और 2·45 इंच लम्बी हैं।

अत. $T_1 = 5 \times 3{\cdot}9 = 19{\cdot}5$ पौं० भार,

और $T_2 = 5 \times 2{\cdot}45 = 12{\cdot}25$ पौं० भार।

उदाहरण ३। क्रेन (Crane). क्रेन के आवश्यक अंग नीचे के चित्र में दर्शाये गये हैं। AB एक ऊर्ध्वाधर खम्भा है; AC एक कड़ी है जिसे जिब (jib) कहते हैं और जो अपने सिरे A के चारों ओर घूम सकती है; यह एक लकड़ी की छड़ अथवा जंजीर CD से



रोकि टाई (tie) कहते हैं, थमी रहती है जो खम्भे के एक बिन्दु D पर लगी होती है। C पर एक घिरनी होती है जिसके ऊपर होकर एक जंजीर जाती है जिसका एक सिरा उस भार से बँधा होता है जो

उठाना होता है और जिसके दूसरे सिरे E पर बल लगाया जाता है जो भार W को उठाता है। यह सिरा साधारणतः एक बेलन के चारों ओर लिपटा रहता है। छड CD कभी कभी क्षैतिज होती है और बहुधा जंजीर CE की दिशा उस पर ही होती है। ऊपर के चित्र में जिब और छड की क्रियाओं को लेखाचित्र द्वारा इस प्रकार निकाला जा सकता है :

किसी पैमाने पर KL ऊर्ध्वाधरस्त W को प्रदर्शित करती हुई खींचो, और फिर LM, KL के बराबर और CE के समानान्तर खीचो ; M से MN, AC के समानान्तर और KN, DC के समानान्तर खीचो।

अब C की समतुलित अवस्था के लिये $KLMN$ एक बल-बहुभुज होगा, क्योंकि हम यह मान लेते हैं कि घिरनी C पर होकर गुजरने से जंजीर का तनाव नही बदलता और इसलिये CE का तनाव W के बराबर होता है। अत, यदि AC पर दवाव T है और CD पर खिचाव T' है, तो

$$\frac{T}{MN}=\frac{T'}{NK}=\frac{W}{KL}.$$

अत. T और T', MN और NK से उसी पैमाने से प्रदर्शित होते हैं जिससे कि KL, W को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणमाला ७

[निम्न प्रश्नों को ज्यामितिय रचना द्वारा हल करो।]

१। एक नाव नदी में दो रस्सियों द्वारा घसीटी जा रही है जो नाव के एक ही बिन्दु से बँधी हुई है और जिनको दो आदमी, नदी के आमने सामने के किनारों पर दो स्थानों से जिनके बीच में ५० फुट की दूरी रहती है, खीचते हैं ; एक रस्सी 30 फुट लम्बी है और उसपर 35 पौं० भार का बल लगाया जाता है और दूसरी रस्सी 45 फुट लम्बी है। इस प्रकार नाव समान चाल से एक सरल

रेखा मे चलाई जाती है। नदी का नाव पर प्रतिरोध और दूसरी रस्सी का तनाव मालूम करो।

२। एक क्रेन का जिब 10 फुट लम्बा है, और छड़ क्षैतिज है जो जिब के पाये से 6 फुट ठीक ऊपर लगी हुई है; छड़ में तनाव और जिब पर दबाव मालूम करो जबकि क्रेन एक टन के भार को थामे हुये है।

३। A और B दो नियत विन्दु हैं; B, A के नीचे है, और उनके बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रमसे 4 फुट और 1 फुट हैं; AC और BC, 5 फुट और 3 फुट लम्बी डोरियाँ हैं, और C पर एक हंड्रेडवेट भार का पिंड बँधा हुआ है; डोरियों के तनाव मालूम करो।

४। $ABCD$ एक हल्की डोरी है जो एक ही क्षैतिज रेखा में A और D दो विन्दुओं से बँधी हुई है, और B और C पर भार लटके हुये है। समतुलित अवस्था में AD के नीचे बिन्दु B और C की दूरियाँ क्रम से 4 और 6 फुट है। यदि AB और CD की लम्बाइयाँ क्रम से 6 और 8 फुट है और AD की दूरी 14 फुट है तो C पर लटका हुआ भार मालूम करो जबकि B पर लटका हुआ भार परिमाण में 4 पौ० है।

५। ABC एक ढाँचा A और B दो आलम्बनों पर AB को क्षैतिज किये हुये ऊर्ध्वाधर धरातल मे रखा हुआ है; यदि AB, BC, और CA की लम्बाइयाँ क्रमसे 10, 7, और 9 फुट है और 10 हंड्रेटवेट का एक भार C पर रखा हुआ है; A और B पर प्रतिबल और ढाँचे के भिन्न भिन्न भागों पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

६। ABC एक ढाँचा इस प्रकार थामा गया है कि AB को क्षैतिज रखते हुये वह ऊर्ध्वाधर धरातल में है, और 200 पौं० का एक भार C पर लटका हुआ है; यदि AB=5 फुट BC=4 फुट और AC=3 फुट, तो AC और CB मे तनाव अथवा दवाव, और A और B पर प्रतिबल मालूम करो।

७। एक क्रेन का जिब 20 फुट, छड़ 16 फुट, और खम्भा 10 फुट लम्बा है। 10 हंड्रेटवेट का एक भार उस जंजीर के सिरे से लटका हुआ है जो जिब के सिरे पर लगी हुई घिरनी के ऊपर होकर छड़ की सीध मे जाती है। जिब पर दबाव और छड़ पर खिंचाव मालूम करो।

८। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में छड़ DC क्षैतिज है और जंजीर उस पर पड़ती है ; यदि $W=500$ पौं०, $AC=11$ फुट और $DC=5$ फुट, तो DC और AC पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

९। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र मे, कोण $CDB=45°$ और कोण $ACD=15°$; जंजीर EC, DC पर पड़ती है ; यदि W एक टन के बराबर है, तो AC और CD पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

१०। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में, $DA=15$ फुट, $DC=20$ फुट, और $AC=30$ फुट और एक टन का भार C मे लटका हुआ है, AC, CD और DA पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो, जबकि जंजीर (१) जिब AC (२) छड़ CD पर पड़ती है।

११। धारा ५० के उदाहरण ३ के चित्र में जिब $AC=25$ फुट, और छड़ $CD=18$ फुट, $AD=12$ फुट और $AE=8$ फुट ; AC और CD पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो, जबकि 2 टन का भार जंजीर के सिरे मे लटका हुआ है।

१२। $ABCD$ चार हल्की छड़ों का एक ढाँचा है जो एक दूसरे से ढीली जुड़ी हुई है, AB और AD लम्बाई में चार चार फुट है और BC और CD दो दो फुट है। कब्जा C, A से 5 फुट लम्बी एक बारीक डोरी द्वारा मिला दिया गया है। सौ-सौ पौंड के ... D पर लगा दिये गये है और ढाँचे को ... । दिया ... करो कि AC पर तनाव 52 पौं० ... है।

१३। पिछले प्रश्न में यदि डोरी AC की जगह एक 3 फुट लम्बी हल्की छड़ ढांचे को कड़ा रखने के लिये लगा दी जाय, C पर 100 पौ० का भार लगा दिया जाय और B और D पर कोई भी भार न लगाया जाय, तो सिद्ध करो कि छड़ BD पर दबाव लगभग 77 पौं० भार के बराबर होगा।

१४। बारहवें प्रश्न में यदि B और D पर कोई भार न हो और ढांचे को एक चिकनी मेज पर रख दिया जाय, B और D कब्जों पर एक दूसरे की ओर पच्चीस पच्चीस पौंड के दो बलों से BD सरल रेखा में दबाव डाला जाय, तो सिद्ध करो डोरी पर तनाव लगभग 31·6 पौ० भार के बराबर होगा।

१५। $ABCD$ एक सम-चतुर्भुज है जो एक दूसरे से ढीली जुड़ी हुई चार हल्की छड़ों से बना है, चित्र एक हल्की छड़ से, जो लम्बाई में चारों छड़ों में से प्रत्येक की आधी है और AB और AD के मध्य बिन्दुओं को मिलाती है, कड़ा कर दिया गया है। यदि यह ढांचा A से लटकाया जाय और C पर 100 पौ० का एक भार लगा दिया जाय, तो सिद्ध करो कि क्षैतिज छड़ पर दबाव लगभग 115·5 पौं० भार के बराबर है।

अध्याय ४

समानान्तर बल

(Parallel Forces)

५१—अध्याय २ और ३ में हम बता चुके हैं कि एक बिन्दु पर कार्य करते हुये बलों का परिणामीबल किस प्रकार निकाला जाता है। इस अध्याय में हम समानान्तर बलों के संयोजन पर विचार करेंगे।

वर्तमान जीवन में स्थिति सम्बन्धी साधारण प्रश्न बहुधा व्यवहार में आते हैं।

दो समानान्तर बल **सम** कहलाते हैं जब उनकी क्रिया रेखायें एक ही ओर होती हैं, और **विषम** कहलाते हैं जब वे विपरीत होती हैं।

५२—किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये दो समानान्तर बलों का परिणामीबल मालूम करना।

पहली स्थिति। मान लो बल सम हैं।

मान लो बल P और Q पिंड के दो विन्दुओं A और B पर कार्य करते हैं, और मान लो यह AL और BM रेखाओं से प्रदर्शित होते हैं।

AB को मिला दो और A और B पर विपरीत दिशाओं में दो बराबर बल, प्रत्येक S के बराबर लगाओ, जो क्रमसे BA और AB दिशाओं में कार्य करें। मान लो यह बल AD और BE से प्रदर्शित होते हैं। चूंकि दोनों बल समतुलित हैं इसलिये पिंड की समतुलित अवस्था पर इनका कोई प्रभाव नहीं होता।

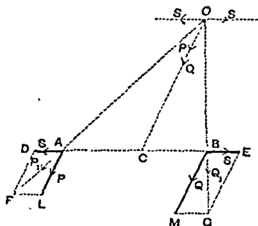
समानान्तर चतुर्भुज $ALFD$ और $BMGE$ को पूरा करो; मान लो उनके विकर्ण FA और GB बढाये जाने पर O पर मिलते हैं। OC को AL अथवा BM के समानान्तर खींचो और मान लो यह AB को C पर मिलता है।

A पर कार्य करते हुये P और S बलों का परिणामीबल P_1 है, जो AF से प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोग विन्दु O पर ले जाया गया है।

इसी प्रकार B पर कार्य करते हुये Q और S बलों का परिणामीबल Q_1 है जो BG से प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोग विन्दु भी O पर ले जाया गया है।

O पर कार्य करता हुआ बल P_1 दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक S जो AD के समानान्तर है और दूसरा P जो OC दिशा में कार्य करता है।

इसी प्रकार O पर कार्य करता हुआ बल Q_1 दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक S जो BE के समानान्तर है और दूसरा Q जो OC दिशा में कार्य करता है।



O पर कार्य करते हुये ये दोनों बल S भी समतुलित होते है।

अत: मौलिक बल P और Q, OC की दिशा में अर्थात् C पर P और Q की मौलिक दिशाओं के समानान्तर कार्य करते हुये एक बल $(P+Q)$ के बरावर हैं।

बिन्दु C का स्थान निर्णय करना। रचना से त्रिभुज OCA त्रिभुज ALF के समरूप हैं ;

$$\therefore \frac{OC}{CA} = \frac{AL}{LF} = \frac{P}{S},$$

$$\therefore P.\ CA = S.\ OC \quad \dots \quad \dots \quad (१).$$

अब चूंकि त्रिभुज OCB और BMG समरूप हैं,

$$\therefore \frac{OC}{CB} = \frac{BM}{MG} = \frac{Q}{S},$$

$$\therefore Q.\ CB = S.\ OC \quad \dots \quad \dots \quad (२),$$

अतः (१) और (२) से

$$P.\ CA = Q.\ CB,$$

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P},$$

अर्थात् C रेखा AB को बलों की व्युत्क्रम निष्पत्ति में अन्तः विभाजित करता है।

दूसरी स्थिति। मान लो बल विषम हैं।

मान लो पिंड के दो बिन्दुओं A और B पर बल P और Q (P, Q से बड़ा है) कार्य करते हैं और मान लो वे AL और BM रेखाओं से प्रदर्शित होते हैं।

AB को मिला दो और A और B पर विपरीत दिशाओं में दो बराबर और प्रत्येक S के बराबर बल लगाओ जो क्रम से BA और AB दिशा में कार्य करें। मान लो यह बल AD और BE से प्रदर्शित होते हैं। चूंकि दोनों बल समतुलित हैं इसलिये पिंड के समतुलन पर इनका कोई प्रभाव नहीं होता।

समानान्तर चतुर्भुज $ALFD$ और $BMGE$ को पूरा करो और इनके विकर्ण AF और GE को बढ़ाओ और मान लो वे O पर मिलते हैं।

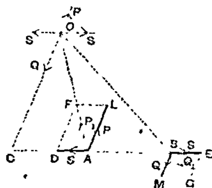
[*यह विकर्ण हमेशा मिलेंगे जबतक कि वे समानान्तर न हों और इस स्थिति में बल P और Q बराबर होंगे।*]

OC को AL अथवा BM के समानान्तर खींचो और मान लो वह AB को C पर मिलता है।

A पर कार्य करते हुये P और S बलों का परिणामीबल P_1 है जो AF में प्रदर्शित होता है। मान लो उसका प्रयोगबिन्दु O पर ले जाया गया है।

इसी प्रकार B पर कार्य करते हुये Q और S बलों का परिणामीबल Q_1 है जो BG, में प्रदर्शित होता है। मान लो इसका प्रयोग बिन्दु भी O पर ले जाया गया है।

O पर कार्य करता हुआ बल P_1 दो बलो में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक S जो AD के समानान्तर है और दूसरा P जो बढाई हुई CO की दिशा में कार्य करता है।



इसी प्रकार O पर कार्य करता हुआ बल Q_1 दो बलों में विश्लिष्ट किया जा सकता है, एक S जो BE के समानान्तर है और दूसरा Q जो OC दिशा में कार्य करता है।

O पर कार्य करते हुये यह दोनों बल S भी समतुलित होते हैं।

अतः मौलिक बल P और Q बढाई हुई CO दिशा में अर्थात् C पर P की दिशा के समानान्तर कार्य करते हुये एक बल $(P—Q)$ के बराबर है।

बिन्दु C का स्थान निर्णय करना। रचना से त्रिभुज OCA, त्रिभुज FDA के समरूप है,

$$\therefore \frac{OC}{CA}=\frac{FD}{DA}=\frac{AL}{AD}=\frac{P}{S},$$

$$\therefore P.CA=S.OC \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

और चूंकि त्रिभुज OCB और BMG समरूप हैं, इसलिये

$$\frac{OC}{CB}=\frac{BM}{MG}=\frac{Q}{S},$$

$$\therefore Q.CB=S.OC. \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

अतः (१) और (२) से, $P.CA=Q.CB.$

अतः $\frac{CA}{CB}=\frac{Q}{P}$, अर्थात् C रेखा AB को बलों की व्युत्क्रम निष्पत्ति में बाह्यः विभाजित करता है।

संक्षेप में; यदि दो समानान्तर बल P और Q किसी दृढ पिंड के दो बिन्दुओं A और B पर कार्य करें तो

(१) उनका परिणामीबल वह बल है जिसकी क्रिया-रेखा अवयव बलों की क्रिया-रेखाओं के समानान्तर होती है, और यदि अवयव बल सम हैं तो परिणामीबल की दिशा वही होती है जो दोनों बलों की है, और यदि अवयव बल विषम हैं तो परिणामीबल की दिशा बड़े अवयव बल की दिशा ही होती है।

(२) प्रयोग बिन्दु C, AB में इस प्रकार होता है कि $P.AC=Q.BC.$

(३) परिणामीबल का परिमाण जब बल सम होते हैं तब दोनों अवयव बलों के योग के बराबर होता है, और जब बल विषम होते हैं तब उनके अन्तर के बराबर होता है।

५३—पिछली रचना के असफल होने की स्थिति। पिछली धारा के दूसरे चित्र मे, यदि बल P और Q दोनों बराबर हों, तो त्रिभुज FDA और

GEB हर प्रकार से बराबर होंगे और इसलिये कोण DAF और EBG भी बराबर होंगे ।

इस स्थिति मे AF और GB रेखाये समानान्तर होंगी और किसी O ऐसे बिन्दु पर नहीं मिलेंगी , इसलिये रचना असफल रहेगी ।

अत. कोई अकेला ऐसा बल नही मालूम किया जा सकता जो दो बराबर विषम समानान्तर बलों के बराबर हो ।

इस स्थिति पर हम पुन., अध्याय ६ मे विचार करेगे ।

५४—यदि किसी दृढ़ पिंड पर कुछ सम समानान्तर बल कार्य करते हैं तो हम उनका परिणामीबल धारा ५३ को बार बार प्रयोग करके मालूम कर सकते हैं । हम पहले, पहले और दूसरे बल का परिणामीबल मालूम करेगे, फिर इस परिणामीबल का और तीसरे बल का परिणामीबल मालूम करेगे, इत्यादि ।

अन्तिम परिणामीबल परिमाण मे सब बलों के योग के बराबर होगा ।

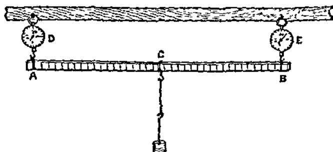
यदि सब समानान्तर बल सम न हों, तो परिणामीबल का परिमाण सब बलों के बीजीय योग के बराबर होगा जबकि उनके पहले उपयुक्त चिन्ह लिखे हों ।

आगे (देखो धारा ११४) समानान्तर बलों के समुदाय के केन्द्र के, अर्थात् उस बिन्दु के जिसपर कि समुदाय का परिणामीबल कार्य करता है, मालूम करने का सूत्र दिया गया है ।

५५—दो समानान्तर बलों का परिणामीबल । प्रयोगात्मक जाँच । लगभग 3 फुट लम्बी लकड़ी की एक सम आयताकार कड़ी लो, जिसका अनुप्रस्थ-परिच्छेद एक इंच अथवा उससे कुछ बड़ी भुजा का एक वर्ग हो । इस कडी का एक फलक इंचों अथवा अर्द्ध-इंचों मे अंशाकित होना चाहिये जैसा कि चित्र मे दिखलाया गया है ।

मान लो उसके सिरे A और B स्प्रिंग तुलाओं से थामे गये हैं और वे दृढ़ता से नियत स्थानों पर लगा दिये गये हैं । इस प्रयोग के लिये साल्टर की वृत्तीय तुला अधिक उपयुक्त है क्योंकि यह साधारण तुलाओं

की अपेक्षा खींचे जाने पर कम लटकती है। कड़ी AB पर हट सकनेवाला एक पाश C है जिसमें एक आँकड़ा लगा हुआ है जिससे भार लटकाये जाते हैं। इस पाश को कड़ी पर उसकी सीध में किसी भी स्थान पर हटा सकते हैं।



भार रखने से पहले जबकि C, AB के मध्य बिन्दु पर हो तो उन परिमाणों को जो तुला D और E बतलाती हैं लिख लो। चूंकि कड़ी सम है, इसलिये ये दोनो परिमाण एक ही होंगे, मान लो वे R हैं।

अ ब ज्ञात भार जिनका योग W के बराबर है, C पर लटकाओ और C को कड़ी के किसी स्थान C_1 पर हटा दो। अब तुला D और E से बतलाये गये नये परिमाणों को लिख लो, और मान लो वे क्रमशः P और Q हैं।

अब भार W के कारण $P-R(=P_1)$ और $Q-R(=Q_1)$ अधिक परिमाण हो जाते हैं, इसलिये D और E पर बल P_1 और Q_1, C_1 पर बल W को समतुलित करते हैं।

और यह भी मालूम हो जायगा कि P_1 और Q_1 का योग W के बराबर है। ... ... (१).

अब AC_1 और BC_1 दूरियों को होशियारी से नापो, तो यह मालूम होगा कि $P_1 \times AC_1 = Q_1 . BC_1$ ... ... (२).

अर्थात् A और B पर कार्य करते हुये बल P_1 और Q_1 का परिणामीबल C_1 पर कार्य करते हुये बल (P_1+Q_1) के बराबर है, जहाँ पर

$$P_1.AC_1=Q_1.BC_1.$$

परन्तु यही फल धारा ५२ (पहली स्थिति) के सैद्धान्तिक अनुसंधान से भी प्राप्त हुआ है।

C_1 के स्थान को हटा कर और W के मान को विना बदले इस प्रयोग को फिर करो ; P_1 और Q_1 के मान बदल जायेंगे परन्तु उनका योग फिर भी W के बराबर होगा और $P_1.AC_1$ का नया मान $Q_1.BC_1$ के नये मान के बराबर होगा।

इसी प्रकार धारा ५२ का नियम भी C_1 के हरएक स्थान के लिये और W के हरएक मान के लिये सही आवेगा।

संख्यात्मक उदाहरण। मान लो कड़ी और लगे हुये यन्त्र का भार (बिना भार लटकाये) 2 पौ० है, तो तुलाओं से बतलाये गये प्रत्येक मौलिक परिमाण R, एक पौंड होगा। C पर 4 पौ० का भार रखो और C को C_1 पर इस प्रकार हटाओ कि तुला A और B क्रम से 4 और 2 पौंड के परिमाण बतलायें। तो C_1 पर कार्य करता हुआ 4 पौ० का बल, A पर कार्य करते हुये 3 $(=4-1)$ पौं० के बल और B पर कार्य करते हुये 1 $(=2-1)$ पौ० के बल से समतुलित होगा।

AC_1 और BC_1 दूरियों को नापो ; यह क्रम से 9 इंच और 27 इंच होंगी (जबकि AB की लम्बाई 3 फुट अर्थात् 36 इंच मान ली जाय)।

इसलिये $P_1.AC_1=3\times 9,$

और $Q_1.BC_1=1\times 27,$

और ये दोनों बराबर हैं।

अतः धारा ५२ (स्थिति १) इस दशा में सत्य सिद्ध हो गई।

विषम समानान्तर बल।

पिछले प्रयोग में A, C_1 और B पर कार्य करते हुये बल P_1, W और

Q_1 समतुलित हैं, इसलिये ऊपर की ओर कार्य करते हुये P_1 और नीचे की ओर कार्य करते हुये W_1, का परिणामीबल Q_1 के बराबर और उसके विपरीत होगा। AB और C_1B दूरियाँ नापो तो मालूम होगा कि

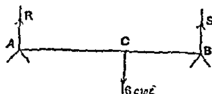
$$Q_1 = W - P,$$

और $$P_1.AB = W.C_1B.$$

अत. धारा ५२ (स्थिति २) की सत्यता की भी जाँच हो गई।

५६—उदाहरण। 6 फुट लम्बी एक हल्की क्षैतिज छड़ के सिरे दो आलम्बनों पर रक्खे हुये हैं ; 6 हंड्रेडवेट के भार का एक पिंड छड़ के एक सिरे से $2\frac{1}{2}$ फुट की दूरी पर लटकाया गया है ; दोनों आलम्बनों पर प्रतिबल मालूम करो।

यदि एक आलम्बन केवल एक हंड्रेडवेट के ही भार के दबाव को सम्हाल सकता हो, तो बताओ दूसरे आलम्बन से अधिक से अधिक वह दूरी क्या होगी जहाँ पिंड लटकाया जा सके।



मान लो AB छड़ है और R और S आलम्बनों के बिन्दुओं पर प्रतिबल हैं। मान लो C वह बिन्दु है जहाँ से पिंड लटकाया गया है, इसलिये $AC = 3\frac{1}{2}$ फुट और $CB = 2\frac{1}{2}$ फुट। समतुलित अवस्था के लिये R और S का परिणामीबल 6 हंड्रेडवेट के बराबर और विपरीत होना चाहिये। अतः धारा ५२ से,

$$R + S = 6 \quad \ldots \quad \ldots \quad (१),$$

और $$\frac{R}{S} = \frac{BC}{AC} = \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = \frac{5}{7} \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

(१) और (२) को हल करके

$$R = \frac{5}{2} \text{ और } S = \frac{7}{2}.$$

अतः प्रतिबल क्रमशः $2\frac{1}{6}$ और $3\frac{1}{6}$ हंड्रेडवेट के बराबर हैं।

यदि A पर प्रतिबल केवल एक हंड्रेडवेट के बराबर हो, तो S, 5 हंड्रेडवेट के बराबर होगा। अतः यदि AC, x के बराबर हो, तो

$$\frac{1}{5}=\frac{BC}{AC}=\frac{6-x}{x}.$$

$$\therefore x=5 \text{ फुट।}$$

अतः BC एक फुट है।

उदाहरणमाला ८

निम्न चार प्रश्नों में A और B, समानान्तर बल P और Q के प्रयोग-बिन्दुओं को और C उस बिन्दु को जहाँ पर उनका परिणामी बल R, AB से मिलता है, सूचित करते हैं।

१। परिणामी बल का परिमाण और स्थान मालूम करो (बल सम हैं), जबकि

(i) $P=4$; $Q=7$; $AB=11$ इंच,

(ii) $P=11$; $Q=19$; $AB=2\frac{1}{2}$ फुट;

(iii) $P=5$; $Q=5$; $AB=3$ फुट।

२। परिणामी बल का परिमाण और स्थान मालूम करो (बल विषम हैं), जबकि

(i) $P=17$; $Q=25$; $AB=8$ इंच;

(ii) $P=23$; $Q=15$; $AB=10$ इंच;

(iii) $P=20$; $Q=9$; $AB=3$ फुट।

३। बल सम हैं

(i) यदि $P=8$; $R=17$; $AC=4\frac{3}{4}$ इंच; Q और AB मालूम करो।

(ii) यदि $Q=11$; $BC=7$ इंच, $AB=8\frac{1}{2}$ इंच; P और R मालूम करो।

(iii) यदि $P=6$; $AC=9$ इंच; $CB=$ [illegible] इंच; Q और R मालूम करो।

४। वल विषम हैं,

(i) यदि $P=8$; $R=17$; $AC=4\frac{1}{2}$ इंच; Q और AB मालूम करो;

(ii) यदि $Q=11$; $AC=-7$ इंच ; $AB=8\frac{3}{4}$ इंच ; P और R मालूम करो ;

(iii) यदि $P=6$; $AC=-9$ इंच ; $AB=12$ इंच ; Q और R मालूम करो।

०५। वे दो सम समानान्तर वल मालूम करो जो एक दूसरे से 2 फुट की दूरी पर कार्य करते हैं और एक दिये हुये 20 पौ० भार के बल के बराबर हैं, जबकि एक वल की क्रिया-रेखा दिये हुये वल से 6 इंच दूर है।

०६। वे दो विषम समानान्तर वल मालूम करो जो एक दूसरे से 18 इंच की दूरी पर कार्य करते हैं और एक दिये हुये 30 पौ० भार के बल के बराउर है, जबकि दोनों में से बड़ा वल दिये हुये वल से 8 इंच की दूरी पर लगा है।

०७। एक पिंड के दिये हुये बिन्दुओं पर P और Q दो समानान्तर बल कार्य करते है; यदि Q को $\frac{P^2}{Q}$ में बदल दिया जाय, तो सिद्ध करो कि परिमाणीवल की क्रिया-रेखा वही होगी जो बलों को केवल अदल बदल करने से होती।

०८। दो आदमी $1\frac{1}{2}$ हुड्रेडवेट भार के एक भारी पीपे को ले जाते हैं, पीपा एक 6 फुट लम्बे हल्के डडे से लटका हुआ है जिसका एक सिरा एक आदमी के कंधे पर और दूसरा सिरा दूसरे आदमी के कंधे पर रखा हुआ है। जिस विन्दु से पीपा लटका हुआ है वह एक आदमी से दूसरे की अपेक्षा एक फुट अधिक निकट है। हर एक कंधे पर दवाव क्या होगा?

०९। दो आदमियों को जिनमे से एक दूसरे से अधिक वलवान है 270 पौ० भार के एक पत्थर को 6 फुट लम्बे एक हल्के तख्ते

से ले जाता है ; बलवान आदमी 180 पौं० ले जा सकता है ; पत्थर किस प्रकार रखा जाय कि बलवान आदमी पर उतना ही दवाव पड़े जितना वह ले जा सकता है ?

१०। 12 फुट लम्बा और 17 पौं० भारी एक सम दंड अपने एक बिन्दु के चारों ओर बेरोक घूम सकता है और दंड समतुलित अवस्था में तब होता है जब 7 पौं० का एक भार उसके एक सिरे पर लटका दिया जाय ; बताओ इस सिरे से वह बिन्दु कितनी दूर है जिसके चारों ओर दंड घूम सकता है।

नोट—किसी सम दंड का भार उसके मध्य बिन्दु पर कार्य करता हुआ मानना चाहिये।

११। एक सीधा सम दंड 3 फुट लम्बा है ; जब 5 पौं० भार उसके एक सिरे पर रख दिया जाय तो वह इस सिरे से 3 इंच दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है ; दंड का भार मालूम करो।

१२। एक सम दंड जिसका भार 3 पौं० है और जिसकी लम्बाई 4 फुट है एक खूंटे पर रखा हुआ है और दूसरे सिरे पर एक पौंड भार के बल से, जो ऊर्ध्वाधर दिशा में लगाया गया है, क्षैतिज अवस्था में थमा हुआ है। दंड के मध्य बिन्दु से खूंटे की दूरी मालूम करो।

१३। 4 फुट लम्बा एक भारी सम दंड दो खूंटियों पर, जिसके बीच में एक फुट की दूरी है, क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है ; यदि 10 पौं० का भार एक सिरे से अथवा 4 पौं० का भार दूसरे सिरे से लटकायें तो दंड ठीक झुक जाने को होता है। दंड का भार और उसके मध्य बिन्दु से खूंटियों की दूरियाँ मालूम करो।

१४। $2\frac{1}{2}$ फुट लम्बा और 8 पौं० भारी एक समदंड ऊर्ध्वाधर दीवार में दो बिन्दुओं A और B पर गड़ी हुई खूंटियों पर रखा हुआ है। A और B क्षैतिज रेखा में हैं और उनके बीच की दूरी 5 इंच है ; बताओ खूंटियों से दंड के सिरे कितने बाहर निकले हुये हैं जबकि दोनों खूंटियों के दबावों का अन्तर 6 पौं० भार के बराबर है।

०१५। 4 फुट लम्बा एक सम दंड, दो खूँटियों पर जिनके बीच की दूरी 3 फुट है, इस प्रकार क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है कि दंड एक खूँटी से एक फुट बाहर निकला हुआ है ; सिद्ध करो कि एक खूँटी पर दवाव दूसरी खूँटी के दवाव से दुगना होगा।

१६। 2 फुट लम्बी एक सीधी हल्की छड दो खूँटियों के बीच में जिनके बीच की दूरी 3 इंच है क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है, एक खूँटी छड के एक सिरे है, पर और 5 पौ० का एक भार दूसरे सिरे से लटका हुआ है, खूँटियों पर दवाव मालूम करो।

१७। एक भारी सम दंड का भार W है और उसका एक सिरा एक चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, और दंड के दूसरे सिरे से बँधी हुई एक डोरी धरातल के ऊपर किसी नियत बिन्दु से बँधी हुई है ; डोरी का तनाव मालूम करो।

०१८। एक आदमी एक गठरी को एक छड़ी जो उसके कंधे पर रखी हुई है, के सिरे पर, लटकाये लिये जा रहा है ; यदि उसके हाथ और कंधे के बीच की दूरी बदल दी जाय, तो बताओ उसके कंधे पर दवाव किस प्रकार बदल जायगा।

०१९। एक आदमी 50 पौ० के एक भार को 3 फुट लम्बी एक छड़ी के सिरे पर लटकाये हुये लिये जा रहा है ; छड़ी उसके कंधे पर रखी हुई है। वह छडी को इस प्रकार रखता है कि उसके कंधे और हाथ के बीच की दूरी (१) 12 इंच, (२) 18 इंच, और (३) 24 इंच है ; बताओ प्रत्येक दशा में वह अपने हाथ पर कौन सा बल लगाता है, और उसके कंधे पर कितना दवाव पड़ता है।

२०। एक क्षैतिज छड़ पर तीन समानान्तर बल कार्य करते हैं। प्रत्येक बल एक पौंड भार के बराबर है, दायाँ बल ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर कार्य करता है और शेष दो ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर पहले बल से क्रमशः 2 और 3 फुट की दूरी पर कार्य करते हैं ; उनके परिणामी बल का परिमाण और स्थान मालूम करो।

२१। एक चमड़े के सन्दूक को जिसकी लम्बाई 3 फुट और ऊंचाई 2 फुट और जिसका गुरुत्व केन्द्र उसके केन्द्र पर है, दो आदमी नीचे के हिस्से के सामने और पिछले किनारो को पकड़े हुये दूसरी मंजिल पर ले जा रहे हैं। यदि यह हिस्सा क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है और सन्दूक का भार एक हड्रेडवेट है, तो बताओ प्रत्येक आदमी कितना भार सम्हालता है।

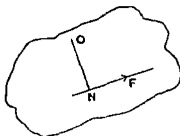
अध्याय ५

घूर्ण

(Moments)

५७—परिभाषा। एक दिये हुये बिन्दु पर किसी बल का घूर्ण बल और दिये बिन्दु से बल की क्रिया रेखा पर खींचे हुये लम्ब का गुणनफल होता है।

जैसे, बल F का बिन्दु O पर घूर्ण $F \times ON$ है जहाँ पर ON, O से F की क्रिया-रेखा पर खींचा हुआ लम्ब है।



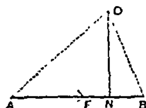
यह स्मरण रहे कि किसी दिये हुये बिन्दु पर बल F का घूर्ण कभी शून्य नहीं होता जबतक कि या तो बल F ही शून्य हो या बल दिये हुये बिन्दु से होकर जाय।

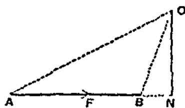
५८—घूर्ण का ज्यामितीय प्रतिदर्शन।

मान लो बल F परिमाण और दिशा में AB रेखा से प्रदर्शित होता है। मान लो O कोई दिया हुआ बिन्दु है और ON, O से AB अथवा AB बढ़ाई हुई पर लम्ब है।

OA और OB को मिला दो।

परिभाषा में O पर F का घूर्ण $F \times ON$ अर्थात् $AB \times ON$ है। परन्तु $AB \times ON$ त्रिभुज OAB के क्षेत्रफल के दुगने के बराबर है [क्योंकि





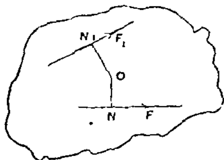
यह उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका आधार AB है और ऊँचाई ON है] अतः बिन्दु O पर बल F का घूर्ण त्रिभुज OAB के क्षेत्रफल के दुगने से प्रदर्शित होता है अर्थात् उस त्रिभुज के दुगने से प्रदर्शित होता है जिसका आधार बल और जिसका शीर्ष दिये हुये बिन्दु को प्रदर्शित करता है।

५९—किसी बिन्दु पर बल के घूर्ण का भौतिक अर्थ।

मान लो धारा ५७ के चित्र का पिंड एक सम पटल है (अर्थात् बहुत ही अल्प मोटाई का पिंड जैसे टीन की चादर अथवा पतली दफ्ती का टुकड़ा) जो एक चिकनी मेज़ पर रखा हुआ है और मान लो पिंड का बिन्दु O नियत है। पिंड पर लगाये गये बल का प्रभाव यह होगा कि पिंड O केन्द्र पर घूमने लगेगा। और यह प्रभाव शून्य नहीं होगा जबतक कि (१) बल शून्य न हो, अथवा (२) बल F की क्रिया-रेखा O से होकर न गुजरे, और इस स्थिति में दूरी ON शून्य होगी। अतः गुणनफल $F \times ON$ पिंड को O पर घुमाने की F की प्रवृत्ति का उचित माप है। इसकी जांच इस प्रकार प्रयोग द्वारा की जा सकती है :

मान लो पटल समतुलित अवस्था में है जब उसके दो नियत बिन्दुओं पर बँधी हुई डोरियों द्वारा दो बल F और F_1, जिनकी क्रिया रेखायें

पटल के धरातल में हैं, कार्य करते हैं। मान लो नियत बिन्दु O से F और F_1 की क्रिया रेखाओं पर ON और ON_1 लम्ब खींचे गये हैं।



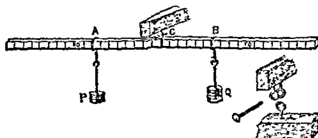
यदि हम ON_1 और ON की लम्बाइयाँ और बल F और F_1 के तनाव नापें, तो मालूम होगा कि गुणनफल $F.ON$ हमेशा $F_1.ON_1$ के बराबर होगा।

अतः F और F_1 दोनों बलों की पिंड को O पर घुमाने की बराबर और विपरीत प्रवृत्तियाँ होंगी यदि O पर उनके घूर्णों का परिमाण बराबर हो।

यह बल F और F_1, डोरियों को हल्की चिकनी घिरनियों के ऊपर से ले जाकर और उनके सिरों पर पर्याप्त भार लटकाकर जिससे वे समतुलित अवस्था में हो जायँ, नापे जा सकते हैं; अथवा डोरियों को दो स्प्रिंग तुलाओं की कड़ियों से बाँध कर और उनके परिमाणों को देखकर जैसा कि धारा २५ में किया गया है, दोनों बल नापे जा सकते हैं।

६०—प्रयोग विधि। सिद्ध करो कि यदि किसी पिंड पर, जिसका एक बिन्दु नियत है, दो बल कार्य करें और वह समतुलित अवस्था में रहें, तो दोनों बलों के घूर्ण नियत बिन्दु पर बराबर और विपरीत होंगे।

धारा ५५ मे जिस कड़ी का प्रयोग किया गया है, मान लो वह बिन्दु C से इस प्रकार लटकाई गई है कि वह समतुलित अवस्था में



है ; यदि कडी सम है तो C उसका मध्य विन्दु होगा, और यदि वह सम नही है तो C उसका गुरुत्व केन्द्र होगा (अध्याय ९) । छड को इस प्रकार लटकाना चाहिये कि वह आसानी से और वेरोक C के चारों ओर घूम सके।

जब बल समानान्तर हैं। कडी के किन्ही दो विन्दुओं A और B से वाहक लटकाओ और उनमें ऐसे भार रखो कि वह फिर समतुलित अवस्था मे आ जाय।

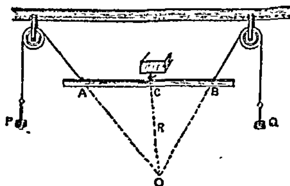
मान लो A पर वाहक के भार सहित कुल भार P है और इसी प्रकार B पर कुल भार Q है। AC और BC दूरियों को नापो।

तो यह मालूम हो जायगा कि गुणनफल $P.AC$ और $Q.BC$ आपस में बराबर हैं। इस नियम की सत्यता की जाँच, दो बलों से अधिक के लिये भी कडी पर इस प्रकार के कई वाहक लटका कर और उनमें ऐसे भार रख कर कि वह समतुलित अवस्था में रहे, की जा सकती है।

प्रत्येक स्थिति में यह मालूम होगा कि C के एक ओर के भारों के घूर्णों का योगफल दूसरी ओर के भारों के घूर्णों के योगफल के बराबर है।

जब बल समानान्तर नहीं हैं। कड़ी को पहले की भाँति रखो और मान लो कि A और B पर हल्की डोरियाँ बँधी हुई है जो

हल्की घिरनियों के ऊपर होकर अपने सिरों पर वाहकों को थामे हुये है। मान लो इन वाहकों में ऐसे भार रखे हुये हैं कि कड़ी क्षैतिज है।



मान लो वाहकों में वाहकों के भार सहित कुल भार P और Q है; यही A और B पर डोरियों के तनाव होंगे।

C से OA और OB के लम्ब क्रम से p और q नापो तो मालूम होगा कि

$$P.\,p = Q.\,q.$$

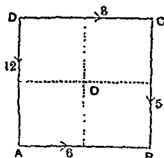
६१—धन और ऋण घूर्ण। धारा ५७ में बल F, यदि वही केवल एक मात्र बल है जो पटल पर कार्य करता है, पटल को उस दिशा में घुमायेगा जिसके विपरीत घड़ी की सुइयां घूमती है जबकि घड़ी ऊपर को ओर मुंह किये हुये मेज पर रखी हो।

बल F_1, यदि वही केवल एक मात्र बल है जो पटल पर कार्य करता है, पटल को उस दिशा में घुमायगा जिस ओर घड़ी की सुइयां घूमती हैं।

O पर F का घूर्ण, अर्थात् ↶) दिशा में धन कहलाता है, और O पर F_1 का घूर्ण, अर्थात् ↷) दिशा में ऋण कहलाता है।

घूर्णों का बीजीय योग। किसी दिये हुये बिन्दु पर कुछ बलों के घूर्णों का बीजीय योग बलों के घूर्णों के योग के बराबर होता है जबकि प्रत्येक घूर्ण के पहले उचित चिन्ह लगा हो।

उदाहरण। $ABCD$ एक वर्ग है ; उसकी भुजाओं AB, CB, DC और DA की सीध में क्रम से 6, 5, 8 और 12 पौं० भार के बल कार्य करते हैं। वर्ग के केन्द्र O पर इन बलों के घूर्णों का बीजीय योग मालूम करो जबकि वर्ग की भुजा की लम्बाई 4 फुट है।



DA और AB के ऊपर कार्य करने वाले बलो की प्रवृत्ति वर्ग को धन दिशा में घुमाने की है, और DC और CB के ऊपर कार्य करने वाले बलो की प्रवृत्ति उसे ऋण दिशा में घुमाने की है।

O की प्रत्येक बल से लम्ब दूरी 2 फुट है।

अतः बलों के घूर्ण क्रम से $+6\times2, -5\times2, -8\times2$, और $+12\times2$ हैं। इसलिये इनका बीजीय योग $2(6-5-8+12)$ अथवा घूर्ण की 10 इकाइयो अर्थात् एक पौंड भार के घूर्ण के जो O से एक फुट की दूरी पर कार्य करता है 10 गुने के बराबर है।

६२—साध्य। धरातल के किसी बिन्दु पर दो बलों के घूर्णों का बीजीय योग उसी बिन्दु पर उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है।

पहली स्थिति। मान लो बल एक बिन्दु पर मिलते हैं।

मान लो बिन्दु A पर कार्य करते हुये P और Q दो बल हैं और मान लो O वह बिन्दु है जिसपर घूर्ण लेने हैं। OC को P को दिशा के समानान्तर खीचो जो Q की कार्य रेखा को बिन्दु C पर मिले।

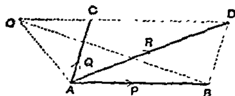
मान लो AC परिमाण में Q को प्रदर्शित करता है और उसी पैमाने पर मान लो AB, P को प्रदर्शित करता है। समानान्तर चतुर्भुज $ABDC$ को पूरा करो, और OA और OB को मिला दो।

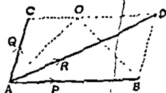
अब AD, P और Q के परिणामीबल, R को प्रदर्शित करेगा।

(क) मान लो विन्दु O कोण DAC के बाहर है जैसा कि पहले चित्र मे दिखलाया गया है, तो हमें सिद्ध करना है कि

$$2\triangle OAB + 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

[क्योंकि O पर P और Q के घूर्ण एक ही दिशा में है।]





चूँकि AB और OD समानान्तर है,

$$\therefore \ \triangle OAB = \triangle DAB = \triangle ACD.$$

$$\therefore \ 2\triangle OAB + 2\triangle OAC = 2\triangle ACD + 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

(ख) मान लो विन्दु O कोण CAD के भीतर है, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो हमें सिद्ध करना है कि

$$2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle AOD.$$

[क्योंकि O पर P और Q के घूर्ण विपरीत दिशाओं में है।]

जैसा कि (क) में,

$$\triangle AOB = \triangle DAB = \triangle ACD.$$

$$\therefore \ 2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle ACD - 2\triangle OAC = 2\triangle OAD.$$

दूसरी स्थिति। मान लो बल समानान्तर हैं।

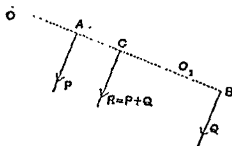
मान लो P और Q दो समानान्तर बल है और $R(=P+Q)$ उनका परिणामीबल है।

उनके धरातल में किसी विन्दु O से बलों पर $OACB$ लम्ब खीचो जो उन्हें क्रम से A, C, और B पर मिलें।

धारा ५२ से, $P.AC = Q.CB$ ... .. (१);

$\therefore$ O पर P और Q के घूर्णों का योग

$=Q.OB+P.OA$
$=Q(OC+CB)+P(OC-AC)$
$=(P+Q)OC+Q.CB-P.AC$
$=(P+Q).OC$, समीकरण (१) से,
$=O$ पर परिणामीवल का घूर्ण ।



यदि बिन्दु, जैसे O_1 जिसपर हमें घूर्ण मालूम करते हैं, बलों के बीच में है, तो P और Q के घूर्णों के चिन्ह विपरीत होंगे ।

इस स्थिति में, O_1 पर P और Q के घूर्णों का बीजीय योग

$=P.O_1A-Q\ O_1B$
$=P(O_1C+CA)-Q(CB-O_1C)$
$=(P+Q).O_1C+P.CA-Q.CB$
$=(P+Q).O_1C$, समीकरण (१) से ।

ऐसी स्थिति जिसमें बिन्दु का कोई और स्थान हो अथवा जब बल समानान्तर और विषम हों, विद्यार्थी के लिये स्वयं सिद्ध करने के लिये छोड़ दी गई है ।

६३—पिछले साध्य की पहली स्थिति को इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं :

मान लो दो बल P और Q क्रम से AB और AC से प्रदर्शित होते हैं और मान लो AD उनके परिणामीबल R को प्रदर्शित करती है, इसलिये $ABDC$ एक समानान्तर चतुर्भुज है ।

मान लो बलों के धरातल में O कोई बिन्दु है । OA को मिला

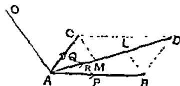
दो ओर BL और CM को OA के समानान्तर खीचो जो AD को क्रम से L और M पर मिले ।

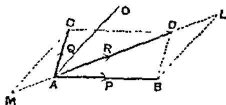
चूंकि त्रिभुज ACM की भुजायें क्रम से त्रिभुज DBL की भुजाओ के समानान्तर हैं, और चूंकि AC, BD के बराबर हैं,

$$\therefore\ AM = LD,$$

$$\therefore\ \triangle OAM = \triangle OLD.$$

(क) मान लो O कोण CAD के बाहर है, जैसा कि पहले चित्र मे दिखलाया गया है, तो





$$\begin{aligned} &2\triangle OAB + 2\triangle OAC \\ &= 2\triangle OAL + 2\triangle OAM \\ &= 2\triangle OAL + 2\triangle OLD \\ &= 2\triangle OAD. \end{aligned}$$

अतः P और Q के घूर्णो का योग R के घूर्ण के बराबर है ।

(ख) मान लो O कोण CAD के भीतर है, जैसा कि दूसरे चित्र में दिखलाया गया है, तो O पर P और Q के घूर्णो का बीजीय योग

$$\begin{aligned} &= \triangle OAB - 2\triangle OAC \\ &= 2\triangle OAL - 2\triangle OAM \end{aligned}$$

$=2\triangle OAL - 2\triangle OLD$

$=2\triangle OAD$

$=O$ पर R का घूर्ण।

६४—यदि बिन्दु O जिसपर घूर्ण मालूम करते हैं, परिणामीबल की क्रिया रेखा पर हैं, तो इस बिन्दु पर परिणामीबल का घूर्ण शून्य होगा। इस स्थिति में दिये हुये बिन्दु पर अवयव बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य होगा, अर्थात् किसी परिणामीबल की क्रिया-रेखा के किसी बिन्दु पर दो बलों के घूर्ण बराबर और चिह्न में विपरीत होते हैं।

विद्यार्थी इस साध्य को आसानी से बिना चित्र खींचे भी सिद्ध कर सकता है, क्योंकि, धारा ६२ में, बिन्दु O बिन्दु D पर पड़ेगा, और हमें केवल यही सिद्ध करना होगा कि त्रिभुज ACO और ABO परस्पर बराबर हैं, जो स्पष्टतः सत्य है।

६५—घूर्णों का व्याप्तिकृत नियम। यदि एक धरातल में किसी दृढ पिंड पर कार्य करते हुये, संख्या में कितने ही, बलों का एक परिणामीबल है, तो उस धरातल में किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है।

मान लो बल $P, Q, R, S, ..$ हैं, और O वह बिन्दु हैं जिसपर घूर्ण लेने हैं।

मान लो P और Q का परिणामी बल P_1 है,

P_1 और R का परिणामीबल P_2 है,

P_2 और S का परिणामीबल P_3 है,

इत्यादि, जबतक कि अन्तिम परिणामीबल मालूम न हो जाय।

अब O पर P_1 का घूर्ण$=P$ और Q के घूर्णों का योग (धारा ६२);

और O पर P का घूर्ण$=P_1$ और R के घूर्णों का योग

$=P, Q$ और R के घूर्णों का योग।

इसी प्रकार O पर P_3 का घूर्ण $=P_2$ और S के घूर्णों का योग
$=P, Q, R$ और S के घूर्णों का योग,

इत्यादि, जबतक कि सब बल न ले लिये जायें ।

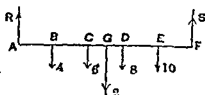
अत. अन्तिम परिणामीबल का घूर्ण = अवयव बलों के घूर्णों का बीजीय योग ।

उपसाध्य । धारा ६४ की ही भाँति दिखलाया जा सकता है कि संख्या मे कितने ही बलों के परिणामीबल की क्रिया- रेखा के किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग शून्य होता है , इसी प्रकार विलोमतः यदि संख्या मे कितने ही बलों के घूर्णों का बीजीय योग, बलो के धरातल के किसी बिन्दु पर, शून्य हो, तो उनका परिणामीबल शून्य होता है (जिस स्थिति में बल समतुलित अवस्था में होते हैं) अथवा परिणामीबल किये हुये बिन्दु से होकर गुजरता है ।

६६—पिछली धारा के नियम मे हम परिणामीबल की क्रिया रेखा पर बिन्दु मालूम कर सकते है, क्योंकि हमे केवल वह बिन्दु मालूम करना होता है जिसपर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य है, और इसलिये परिणामीबल उसमे होकर जाता है । इस सिद्धान्त का अगली धारा के उदाहरण २ और ३ मे प्रयोग करके दिखलाया गया है ।

यदि हमें समानान्तर बलों का कोई समुदाय मालूम हो तो परिणामीबल परिमाण और दिशा में मालूम हो जायगा यदि ऐसा कोई एक बिन्दु ज्ञात होजाय।

६७—**उदाहरण १ ।** 5 फुट लम्बी एक छड दो ऊर्ध्वाधर डोरियों द्वारा, जो उसके सिरों पर बँधी हुई है, लटकी हुई है, और उसके एक सिरे से 4, 6, 8,



और 10 पौं० के भार क्रम से 1, 2, 3, और 4 फुट की दूरी पर लटके हुये है। यदि छड का भार 2 पौं० है, तो डोरियों के तनाव क्या होंगे ?

मान लो AF छड़ है, और उस पर B, C, D, और E वे बिन्दु हैं जहाँ पर भार लटके हुये हैं ; मान लो G मध्य बिन्दु है ; हम यह मान लेंगे कि छड़ का भार इसी बिन्दु पर कार्य करता है ।

मान लो R और S डोरियों पर तनाव हैं । चूँकि बलों का परिणामी-बल शून्य है, इसलिये A पर उसका घूर्ण शून्य होगा ।

अतः धारा ६५ से A पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य होगा ।

इसलिये $4\times1+6\times2+2\times2\frac{1}{2}+8\times3+10\times4-S\times5=0$,

$\therefore\ 5S=4+12+5+24+40=85$,

$\therefore\ S=17$.

इसी प्रकार, F पर घूर्ण मालूम करके,

$$5R=10\times1+8\times2+2\times2\frac{1}{2}+6\times3+4\times4=65,$$

$\therefore\ R=13$.

तनाव R दूसरी तरह भी मालूम हो सकता है। चूँकि भारो का परिणामीबल 30 पौ० भार के बराबर है, और R और S का परिणामीबल $R+S$ के बराबर है, और ये दोनों परिणामीबल समतुलित हैं, इसलिये

$$R+S=30,$$

$$\therefore\ R=30-S=30-17=13.$$

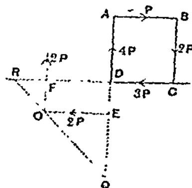
उदाहरण २ । बल P, $2P$, $3P$, और $4P$ वर्ग $ABCD$ की भुजाओं के ऊपर क्रम से कार्य करते हैं ; उनके परिणामीबल का परिमाण, दिशा, और क्रिया-रेखा मालूम करो ।

मान लो वर्ग की भुजा a है ।

धारा ५२ में, बल P और $3P$, E पर कार्य करते हुये समानान्तर बल $2P$ के बराबर है, जहाँ पर $DE=\frac{a}{2}$.

इसी प्रकार बल $4P$ और $2P$, CD के बिन्दु F पर कार्य करते हुये एक समानान्तर बल $2P$ के बरबर है, जहाँ पर $DF=a$.

मान लो इन दोनों अवयव बलों की क्रिया-रेखायें O पर मिलती हैं, तो अन्तिम परिणामीबल $2P\sqrt{2}$ के बराबर है जो CA की समानान्तर दिशा में कार्य करता है।



अन्यथा इस प्रकार ; ज्यामितीय रचना के बिना (जो बहुधा कठिन होती हैं) धारा ६५ के नियम से परिणामीबल की क्रिया-रेखा आसानी से मालूम की जा सकती है।

मान लो प्रयोग रेखा AD और CD को Q और R पर मिलती हैं।

चूंकि Q परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर एक बिन्दु है, इसलिये Q पर चारों बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य होगा।

$$\therefore\ P(DQ+a)+2P(a)=3P.DQ\ ;$$

$$\therefore\ DQ=\frac{3a}{2}.$$

इसी प्रकार बिन्दु R के लिये

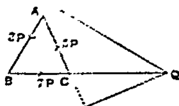
$$P.a+2P(RD+a)=4P.RD;$$

$$\therefore\ RD=\frac{3a}{2}.$$

और चूंकि CD के लम्ब, बलों के अव[illegible] $4P-2P$ अर्थात् $2P$ है, और CD के [illegible] अवयव ब[illegible] $2P$ है, इसलिये परिणामीबल [illegible] $\sqrt{2}P$

उदाहरण ३। बल $3P$, $7P$ और $5P$ क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज BAC की भुजाओं AB, BC और CA के द्वारा कार्य करते हैं; उनके परिणामी बल का परिमाण, दिशा और क्रियारेखा मालूम करो।

मान लो त्रिभुज की भुजा a है, और मान लो परिणामी बल BC भुजा



को Q पर मिलता है, तो धारा ६५ से, Q पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य होगा।

$$\therefore 3P \times (QC + a) \text{ ज्या } 60^\circ = 5P \times QC \text{ ज्या } 60^\circ.$$

$$\therefore QC = \frac{3a}{2}.$$

BC के लम्ब, बलों के अवयव बलों का योग

$$= 5P \text{ ज्या } 60^\circ - 3P \text{ ज्या } 60^\circ = P\sqrt{3}$$

और BC के ऊपर अवयव बलों का योग

$$= 7P - 5P \text{ कोज्या } 60^\circ - 3P \text{ कोज्या } 60^\circ = 3P.$$

अतः परिणामी बल $P\sqrt{12}$ है जो BC से स्पर्शज्या$^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ अथवा 30° का कोण बनाता है और Q से गुज़रता है जहाँ पर $QC = \frac{3}{2}BC$.

उदाहरणमाला ६

१। वर्ग $ABCD$ की भुजा 4 फुट लम्बी है; CB, BA, DA, और DB रेखाओं के ऊपर क्रम से 4, 3, 2, और 5 पौं० भार के बल कार्य करते हैं; C पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग एक फुट-पौंड के निकटतम दशमलव तक मालूम करो।

२। एक सम षट्भुज $ABCDEF$ की भुजा 2 फुट लम्बी है; AB, CB, DC, DE, EF और FA भुजाओं के ऊपर मे क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 पौ० भार के बल कार्य करते है; A पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग मालूम करो।

३। २० फुट लम्बे बाँस का एक सिरा क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और एक डोरी जो उसके ऊपर के सिरे मे बँधी हुई है और क्षैतिज से 30° का कोण बनाती हुई उसे खीचती है; डोरी का तनाव 30 पौ० भार के बराबर है। वह क्षैतिज बल मालूम करो जिसे यदि बाँस के धरातल से 4 फुट ऊँचे विन्दु पर लगायें तो बाँस ऊर्ध्वाधर अवस्था में रुका रहेगा।

४। लोहे का एक समदड 6 फुट लम्बा है और उसका भार 9 पौ० है; उसके सिरों मे 6 और 12 पौ० के भार लटकाये गये है; बताओ दड किस बिन्दु मे लटकाया जाय कि वह क्षैतिज अवस्था में रहे?

५। एक सम कड़ी की लम्बाई 12 फुट है और उसका भार 50 पौ० है, उसके सिरों मे 20 और 30 पौ० भार के पिंड लटकाये गये है, कड़ी को किस विन्दु मे थामा जाय कि वह समतुलित अवस्था में रहे?

६। 5 फुट लम्बे एक सम दड के एक सिरे मे 1, 2, 3, और 4 फुट की दूरियों मे क्रम से 1, 2, 3, और 4 पौ० के भार लटकाये गये है। यदि दड का भार 4 पौ० है, तो उस विन्दु का स्थान मालूम करो जिस पर दंड समतुलित अवस्था में रहे।

७। एक सम दंड, जो लम्बाई में 4 फुट है और जिसका भार 2 पौ० है, अपने एक सिरे मे एक फुट की दूरी के एक विन्दु पर बेरोक घूम सकता है, और उस सिरे मे 10 पौ० का एक भार लटकाया गया है दूसरे सिरे पर कौनसा भार रखा जाय कि दड समतुलित अवस्था में हो जाय?

८। एक भारी सम छड, जो 10 फुट लम्बी है और जिसका भार 10 पौ० है, एक सिरे मे 4 फुट की दूरी पर एक बिन्दु मे थामी गई

है ; इस सिरे पर 6 पौ० का एक भार रखा हुआ है ; दूसरे सिरे पर कौनसा भार रखा जाय कि वह समतुलित अवस्था में रहे ?

९। एक पुल की क्षैतिज सड़क 30 फुट लम्बी और 6 टन भारी है और सिरों पर दो समान खम्भों पर थमी हुई है। प्रत्येक खम्भे पर क्या दबाव होगा जबकि 2 टन भार की एक गाड़ी (१) सड़क के बीचोबीच है, (२) सड़क की दो-तिहाई दूरी पर है ?

१०। 20 इंच लम्बा एक हल्का दंड AB, दो खूँटियों पर जिनके बीच की दूरी 10 इंच है, थमा हुआ है। वह किस प्रकार रखा जाय कि खूँटियों पर प्रतिबल बराबर हों यदि $2W$ और $3W$ के भार क्रम से A और B से लटकाये जायँ ?

११। 3 फुट लम्बे एक हल्के दंड पर एक सिरे से 9 इंच की दूरी पर और दूसरे सिरे से 15 इंच की दूरी पर दो बराबर भार लगे हुये हैं; यदि उसे उसके सिरों पर बँधी हुई दो ऊर्ध्वाधर डोरियों से थामा जाय और यदि डोरियाँ एक हन्ड्रेडवेट से अधिक तनाव नहीं सम्हाल सकती हों तो बराबर भारों का परिमाण अधिक से अधिक क्या होगा ?

१२। एक भारी सम छड़, जिसका भार 40 पौ० है, क्षैतिज अवस्था में दो ऊर्ध्वाधर डोरियों से जिनमें से प्रत्येक 35 पौ० भार तक सम्हाल सकती है, लटकी हुई है। छड़ के मध्य विन्दु से कितनी दूर 20 पौ० का भार रखा जाय कि एक डोरी ठीक टूट जाय ?

१३। 10 फुट लम्बा एक सम दंड AB जिसका भार 50 पौ० है भूमि पर रखा हुआ है। यदि B से 3 फुट की दूरी पर उसके किसी विन्दु पर 100 पौ० का भार रखा जाय, तो बताओ कि A सिरे पर कौनसा ऊर्ध्वाधर बल लगाया जाय कि वह उस सिरे को ठीक उठा सके।

१४। 16 इंच लम्बा एक दंड दो खूँटियों पर जिनके बीच की दूरी 9 इंच है रखा हुआ है, दंड का केन्द्र दोनों खूँटियों के बीचोबीच है। समतुलित अवस्था को बिना नष्ट किये बड़े से बड़े भार जो क्रम से दोनों

होता है और उसकी क्रिया-रेखा BC को $2:1$ की निष्पत्ति में विभाजित करती है।

२७। तीन बल एक त्रिभुज की भुजाओं के ऊपर कार्य करते हैं; सिद्ध करो कि, यदि दो बलों का योग परिमाण में तीसरे बल के बराबर और दिशा में उसके विपरीत हो, तो तीनों बलों का परिणामीबल त्रिभुज के अन्तः-वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है।

२८। बिजली के एक खम्भे के चारों ओर गुजरता हुआ बिजली का तार क्षैतिज है और उसके दो भाग जो खम्भे से बँधे हुये हैं एक दूसरे से $60°$ का कोण बनाते हैं। खम्भा एक तार से थमा हुआ है जो उसके मध्य-बिन्दु से बँधा हुआ है और क्षैतिज से $60°$ का कोण बनाता है; सिद्ध करो कि इस तार का तनाव बिजली के तार के तनाव से $4\sqrt{3}$ गुना है।

२९। एक खम्भे के आधार से किस ऊँचाई पर एक दी हुई लम्बाई की रस्सी का सिरा बाँधा जाय कि भूमि पर खड़ा हुआ एक आदमी जो उसके दूसरे सिरे को किसी दिये हुये बल से खींचता है, खम्भे को उलट देने में अधिक से अधिक प्रभाव डाल सके?

३०। एक बल का परिमाण और दो दिये हुये बिन्दुओं पर उसके घूर्ण ज्ञात हैं। ज्यामितीय रचना द्वारा उसकी क्रिया-रेखा मालूम करो।

३१। किसी धरातल में उन सब बिन्दुओं का बिन्दुपथ मालूम करो जिनमें से किसी एक पर दो बलों के, जिनके परिमाण और स्थान दिये हुये हैं, घूर्ण एक ही दिशा में और आपस में बराबर हों।

३२। AB एक वृत्त का व्यास है और BP और BQ उसकी दो परस्पर लम्ब जीवायें हैं; सिद्ध करो कि A पर BP और BQ से प्रदर्शित किये गये बलों के घूर्ण बराबर हैं।

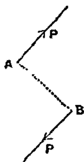
३३। एक साइकिल चलानेवाला, जिसका भार 150 पौं० है, अपना सारा भार एक पैडिल पर रखता है जबकि क्रैंक क्षैतिज अवस्था में है और साइकिल आगे बढ़ने से रुक जाती है। यदि क्रैंक की लम्बाई 6 इंच है और जंजीर के पहिये की त्रिज्या 4 इंच है, तो जंजीर का तनाव मालूम करो।

अध्याय ६

बलयुग्म

(Couples)

६८—**परिभाषा।** दो बराबर समानान्तर बल, जिनकी क्रिया-रेखायें एक ही सीध में नहीं हैं, एक **बलयुग्म** की रचना करते हैं।



दोनों बलों की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरी को बलयुग्म की **भुजा** कहते हैं, अर्थात् उस लम्ब को जो बलों में से किसी एक की क्रिया-रेखा के किसी बिन्दु से दूसरे बल की क्रिया-रेखा पर डाला गया है। जैसे, बलयुग (P, P) की भुजा AB है।

बलयुग्म का घूर्ण बलयुग्म के एक बल और उसकी भुजा का गुणनफल होता है।

चित्र में बलयुग्म का घूर्ण $P \times AB$ है।

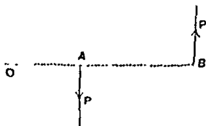
बलयुग्म के उदाहरण हैं ऐसे बल जो स्क्रू-प्रेस के हैन्डिल पर, चाबी लगाते समय घड़ी की चाबी पर, अथवा दरवाजा खोलते समय हाथों से दस्ते पर लगाये जाते हैं।

कुछ लेखक बलयुग्म को घूर्णक (Torque) कहते हैं और कुछ घूर्णक को बलयुग्म के घूर्ण से सूचित करते हैं।

६९—**साध्य।** किसी बिन्दु पर एक बलयुग्म के दोनों बलों के बलयुग्म के धरातल के घूर्णों का बीजीय योग स्थिर होता है और बलयुग्म के घूर्ण के बराबर होता है।

मान लो बलयुग्म के दोनों बलों में से P के बराबर है, और मान लो उनके धरातल में O कोई बिन्दु है।

बलों की क्रिया-रेखाओं पर OAB लम्ब खींचो जो बलों को क्रम से A और B पर मिलता है।



O पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग

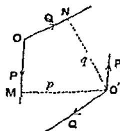
$=P.OB-P.OA=P(OB-OA)=P.AB.$

= बलयुग्म का घूर्ण, और इसलिये सदा वही आता है चाहे किसी भी बिन्दु O पर घूर्ण क्यों न लिये जायँ।

७०—साध्य। किसी धरातल में एक दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये दो बलयुग्म, जिनके घूर्ण बराबर और विरुद्ध है, समतुलित होते हैं।

मान लो एक बलयुग्म के दोनो बल (P, P) अपनी भुजा p के सिरों पर कार्य करते हैं और दूसरे बलयुग्म के दोनों बल (Q, Q) अपनी भुजा q के सिरों पर कार्य करते हैं।

पहली स्थिति। मान लो बल P में से एक, बल Q में से एक को बिन्दु O पर मिलता है, और मान लो शेष दोनों बल O' पर मिलते हैं। O' से $O'M$ और $O'N$ लम्ब उन बलों पर डालो जो O' में होकर नहीं जाते, इसलिये इन लम्बों की लम्बाइयाँ क्रम से p और q होंगी।



चूँकि बलयुग्म के घूर्ण परिमाण में बराबर हैं,

इसलिये $P.p=Q.q,$

अर्थात् $P.O'M=Q.O'N.$

अतः (धारा ६४) O', O पर कार्य करते

हुये P और Q के परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर है, इसलिये OO' इस परिणामीबल की दिशा है।

इसी प्रकार O' पर कार्य करते हुये बल P और Q के परिणामीबल $O'O$ दिशा में है।

ये दोनों परिणामीबल परिमाण में बराबर है ; क्योंकि O पर कार्य करते हुये बल और O' पर कार्य करते हुये बल बराबर हैं और बराबर के ही कोण बनाते हैं।

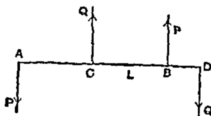
अतः ये दोनों परिणामीबल एक दूसरे के प्रभाव को नष्ट करते हैं और इसलिये चारों बलों से रचे हुये दोनों बलयुग्म समतुलित हैं।

दूसरी स्थिति। मान लो बलयुग्मों के बल सब समानान्तर हैं, और मान लो कोई सरल रेखा, जो उनकी दिशाओं पर लम्ब है, उन्हें $A, B, C,$ और D बिन्दुओं पर मिलती है, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है, इसलिये, चूंकि उनके घूर्ण बराबर हैं,

$$P.AB=Q.CD \quad \ldots \quad (१).$$

मान लो C पर कार्य करते हुये Q, और B पर कार्य करते हुये P बलों के परिणामीबल का प्रयोग-बिन्दु L है, तो

$$P.BL=Q.CL \text{ (धारा ५२)} \quad \ldots \quad (२).$$



(२) को (१) से घटाने पर

$$P.AL=Q.LD,$$

इसलिये A पर कार्य करते हुये P, और D पर कार्य करते हुये Q बलों के परिणामीबल का प्रयोग-बिन्दु भी L है।

परन्तु इन दोनों परिणामीबलों में से प्रत्येक का परिमाण $(P+Q)$ है, और उनकी दिशायें विपरीत हैं, अतः वे समतुलित हैं।

इसलिये चारों बलों से रचे हुये दोनों बलयुग्म समतुलित हैं।

७१—चूंकि एक ही धरातल में दो बलयुग्म, जिनके घूर्ण बराबर परन्तु विरुद्ध हैं, समतुलित होते हैं ; इसलिये उनमें से किसी एक बलयुग्म के बलों की दिशाओं को उल्टा करने से हम यह परिणाम निकालते हैं कि एक धरातल में कोई दो बलयुग्म जिनके घूर्ण बराबर हैं बराबर होते हैं।

इससे यह भी परिणाम निकलता है कि दो सम बलयुग्म जिनके घूर्ण बराबर हैं एक दूसरे दुगने घूर्ण के बलयुग्म के बराबर होते हैं।

७२—साध्य। एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये संख्या में कितने ही बलयुग्म एक मात्र बलयुग्म के बराबर होते हैं जिसका घूर्ण बलयुग्मों के घूर्णों के बीजीय योग के बराबर होता है।

मान लो बलयुग्मों के बल (P, P) जिसकी भुजा p है, (Q, Q) जिसकी भुजा q है, (R, R) जिसकी भुजा r है, इत्यादि हैं। बलयुग्म (Q, Q) के स्थान पर उस बल को प्रतिष्ठित करो जिसके अवयव बलों की क्रिया-रेखायें वही हैं जो बल (P, P) की हैं। इस बलयुग्म के प्रत्येक बल का परिमाण X होगा, जहाँ पर $X.p = Q.q$, (धारा ७१), इसलिये

$$X = Q\frac{q}{p}.$$

इसी प्रकार बलयुग्म (R, R) के स्थान पर बलयुग्म $\left(R\frac{r}{p}, R\frac{r}{p}\right)$ प्रतिष्ठित किया जा सकता है, जिसके बल उसी दिशा में कार्य करते हैं जिसमें बल (P, P).

इसी प्रकार से और बलयुग्मों के लिये भी किया जा सकता है।

अतः सब बलयुग्म उस एक बलयुग्म के बराबर हैं जिसका प्रत्येक बल

$P + Q\frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + \ldots$ है और जिसकी भुजा p है।

इस वलयुग्म का घूर्ण

$$\left(P + Q\frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + \cdots\right) . \ p,$$

अर्थात् $P.p + Q.q + R.r + \cdots$ है ।

अतः मौलिक वलयुग्म एकमात्र वलयुग्म के बराबर है, जिसका घूर्ण उनके घूर्णों के योग के बराबर है ।

यदि सब अवयव वलयुग्मों के चिन्ह समान न हों तो हमें हर एक का उचित चिन्ह रखना चाहिये, और यही प्रमाण उसके लिये भी होगा ।

उदाहरणमाला १०

१। $ABCD$ एक वर्ग है जिसकी भुजा 2 फुट है; AB, BC, CD और DA के ऊपर 1, 2, 8, और 5 पौ० भार के बल और AC और DB के ऊपर $5\sqrt{2}$ और $2\sqrt{2}$ पौ० भार के बल कार्य करते हैं; सिद्ध करो कि वे एक वलयुग्म के बराबर हैं जिसका घूर्ण 16 फुट-पौ० भार के बराबर है ।

२। वर्ग $ABCD$ की भुजा AB और CD के ऊपर दो दो पौंड भार के बल और AD और CB के ऊपर पाँच पाँच पौंड भार के बल कार्य करते हैं; यदि वर्ग की भुजा 3 फुट लम्बी है, तो उस वलयुग्म का घूर्ण मालूम करो जो उन्हें समतुलित अवस्था में कर देगा ।

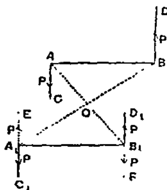
✓ ३। $ABCDEF$ एक सम षट्भुज है; भुजा AB, CB, DE, और FE के ऊपर क्रम से 5, 11, 5, और 11 पौं० भार के बल और CD और FA के ऊपर प्रत्येक x पौं० भार के बल कार्य करते हैं। x का मान मालूम करो यदि बल समतुलित है ।

४। AB एक हल्का क्षैतिज दंड है, A पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर 1 पौं० भार का बल, B पर ऊर्ध्वाधर ऊपर को ओर 1 पौं० भार का बल और उसके किसी दिये हुये बिन्दु C पर C नीचे की ओर दंड

से 30° का कोण बनाते हुये 5 पौ० भार का बल कार्य करते हैं। बताओ दंड के किस बिन्दु पर एक बल लगाया जाय जो इनको समतुलित अवस्था में रखे, और उसका परिमाण और दिशा भी मालूम करो

७३—साध्य। यदि कोई बलयुग्म अपने धरातल से किसी समानान्तर धरातल में इस प्रकार स्थानान्तरित कर दिया जाय कि उसकी भुजा अपनी मौलिक दिशा के समानान्तर रहे तो बलयुग्म के दृढ़ पिंड पर प्रभाव में कोई परिवर्तन नहीं होता।

मान लो बलयुग्म के बल (P, P), भुजा AB और उसके बलों की क्रिया-रेखायें AC और BD हैं।



मान लो A_1B_1, AB के बराबर और समानान्तर हैं।

A_1C_1 और B_1D_1 क्रम से AC और BD के समानान्तर खींचो।

A_1 पर दो बराबर और विपरीत बल प्रत्येक P के बराबर, लगाओ, जो A_1C_1 दिशा तथा विपरीत दिशा A_1E में कार्य करते हों।

इसी प्रकार B_1 पर दो बराबर और विपरीत बल, प्रत्येक P के

बराबर, लगाओ जो B_1D_1 दिशा तथा विपरीत दिशा B_1F मे कार्य करते हो ।

इन बलों का पिंड के समतुलन पर कोई प्रभाव नहीं होगा ।

AB_1 और A_1B को मिला दो और मान लो यह O पर मिलती हैं ; तो, O, AB_1 और A_1B दोनों का मध्य-बिन्दु है ।

B पर कार्य करते हुये बल P और A_1E के ऊपर कार्य करते हुये बल P का परिणामीबल $2P$ होगा जो BD के समानान्तर O पर कार्य करेगा ।

A पर कार्य करते हुये बल P और B_1F के ऊपर कार्य करते हुये बल P का परिणामीबल $2P$ होगा जो AC के समानान्तर O पर कार्य करेगा ।

चूंकि ये दोनों परिणामीबल बराबर और विपरीत हैं, इसलिये ये समतुल्ति होंगे । अत: अब हमारे पास दो बल (P, P) रह गये हैं जो A_1 और B_1 पर A_1C_1 और B_1D_1 की दिशाओं अर्थात् मौलिक बलयुग्म के बलों की दिशाओं के समानान्तर कार्य करते हैं ।

और A_1C_1 और B_1D_1 में होकर खींचा गया धरातल, AC और BD में होकर खीचे गये धरातल के समानान्तर है ।

अत: साध्य सिद्ध हो गया ।

उपसाध्य । इस साध्य और धारा ७१ मे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि एक बलयुग्म समानान्तर धरातल मे दूसरे बलयुग्म में स्थानान्तरित किया जा सकता है, यदि दोनों बलयुग्मों के घूर्ण बराबर हों ।

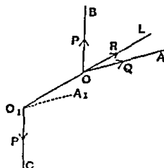
७४ साध्य । एक ही धरातल में किसी दृढ पिंड पर कार्य करते हुये एक बल और एक बलयुग्म कभी भी समतुलित नहीं हो सकते, किन्तु वे मौलिक बल के बराबर होते हैं जो अपनी मौलिक दिशा की समानान्तर दिशा मे कार्य करता है ।

मान लो बलयुग्म का प्रत्येक बल P के बराबर है और उसकी क्रिया-रेखायें क्रम से OB और O_1C हैं।

मान लो बल Q है।

पहली स्थिति। यदि Q बलयुग्म के बलों के समानान्तर नहीं है तो मान लो वह बढ़ाये जाने पर बलयुग्म के बलों में से एक को O पर मिलता है।

O पर कार्य करते हुये P और Q, बल R के बराबर हैं जो AO और OB के बीच में किसी दिशा OL में कार्य करता है।



OL को (यदि आवश्यकता हो तो पीछे की ओर) बढ़ाओ ताकि यह बलयुग्म के दूसरे बल को O_1 पर मिले, और R के प्रयोग-बिन्दु को O_1 पर स्थानान्तरित करो।

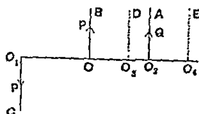
O_1A_1 को OA के समानान्तर खींचो।

अब बल R दो बलों Q और P में, जिनमें से पहला O_1A_1 दिशा में और दूसरा O_1C के विपरीत दिशा में कार्य करता है, विश्लिष्ट किया जा सकता है।

यह दूसरा बल P बलयुग्म के दूसरे बल P से जो O_1C दिशा में कार्य करता है, समसुलित है।

अतः परिणामीबल Q है जो O_1A_1 दिशा में अपनी मौलिक दिशा OA के समानान्तर मार्य करता है।

दूसरी स्थिति। मान लो बल Q बलयुग्म के एक बल के समानान्तर है।



मान लो O_1O बल Q को O_2 पर मिलती है।

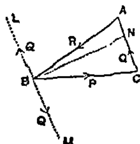
इसलिये O पर कार्य करता हुआ समानान्तर बल P और O_2 पर कार्य करता हुआ Q, धारा ५२ से, बल $(P+Q)$ के बराबर है जो OB के समानान्तर दिशा में किसी बिन्दु O_3 पर कार्य करता है। इसी प्रकार O_3 पर कार्य करता हुआ विषम समानान्तर बल $(P+Q)$ और O^1 पर कार्य करता हुआ P, बल Q के बराबर है जो O_3D के समानान्तर दिशा में किसी बिन्दु O_4 पर कार्य करता है।

अतः परिमाणीबल एक मात्र बल Q के बराबर है जो अपनी मौलिक दिशा के समानान्तर मार्य करता है।

७५—यदि किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये तीन बल परिमाण, दिशा और क्रिया-रेखाओं में क्रमानुसार किसी त्रिभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किये जायँ, तो वे उस बलयुग्म के बराबर होते हैं जिसका घूर्ण त्रिभुज के क्षेत्रफल के दुगने से प्रदर्शित होता है।

मान लो ABC त्रिभुज है और P, Q और R बल हैं जो त्रिभुज की भुजाओं BC, CA और AB से प्रदर्शित होते हैं।

B में होकर LBM भुजा AC के समानान्तर खींचो, और B पर दो बराबर और विरुद्ध बल जिनमें से प्रत्येक Q के बराबर है क्रम से दिशा BL और BM में लगाओ। बल-त्रिभुज (धारा ३६) से बल P, R और Q जो रेखा BL के ऊपर कार्य करता है, समतुलित है।



अत. केवल दो बल प्रत्येक Q के बराबर जो क्रम से CA और BM दिशाओं में कार्य करते हैं, रह गये।

ये उस बलयुग्म की रचना करते है जिसका घूर्ण $Q \times BN$ है, जहाँ पर BN, CA पर लम्ब है।

और $Q \times BN = CA \times BN =$ त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल का दुगना।

उपसाध्य। इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि यदि एक धरातल में किसी दृढ पिंड पर बलों का एक समुदाय परिमाण, दिशाओं और क्रिया-रेखाओं में क्रमानुसार किसी बहुभुज की भुजाओं से प्रदर्शित किया जा सके, तो वे उस बलयुग्म के बराबर होंगे जिसका घूर्ण बहुभुज के क्षेत्रफल के दुगने से प्रदर्शित होता है।

अध्याय ७

एक धरातल में तीन बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड का समतुलन

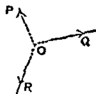
(Equilibrium of a Rigid Body acted upon by three forces in a plane)

७६—इस अध्याय में हम एक धरातल में तीन बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड की समतुलित अवस्था की कुछ सरल स्थितियों पर विचार करेंगे।

अगली धारा के साध्य की सहायता से हम यह देखेंगे कि दृढ़ पिंड के समतुलन के नियम एकमात्र कण के नियमों में परिणत हो जाते हैं।

७७—साध्य। यदि किसी दृढ़ पिंड पर एक धरातल में तीन बल कार्य करते हुये उसे समतुलित अवस्था में रखते हैं, तो वे बल एक बिन्दु पर मिलेंगे अथवा समानान्तर होंगे।

यदि तीनों बल समानान्तर नहीं हैं तो उनमें से कम से कम दो अवश्य मिलेंगे, मान लो ये दोनों P और Q हैं और मान लो उनकी क्रिया-रेखायें O पर मिलती हैं।



तो तीसरा बल R भी O से होकर गुजरेगा।

चूंकि किसी भी संख्या में बलों के घूर्णों का बीजीय योग उनके धरातल के किसी विन्दु पर उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है, इसलिये O पर P, Q और R के घूर्णों का योग उनके परिणामीवल के घूर्ण के बराबर है।

परन्तु यह परिणामी शून्य है क्योंकि बल समतुलित हैं।

अतः O पर P, Q और R के घूर्णों का योग शून्य होगा।

परन्तु चूँकि P और Q दोनों O से होकर गुजरते हैं इसलिये O पर उनके घूर्ण शून्य हैं।

अतः O पर R का घूर्ण भी शून्य है।

अतः धारा ५७ से, चूँकि R शून्य नहीं है, उसकी क्रिया-रेखा O से होकर गुजरेगी।

अतः बल एक विन्दु में होकर गुजरते हैं।

अन्यथा इस प्रकार। P और Q का परिणामीबल कोई बल होगा जो O से होकर गुजरेगा।

परन्तु चूँकि बल P, Q और R समतुलित हैं, यह P और Q का परिणामीबल R से समतुलित होगा।

परन्तु ये दोनों समतुलित नहीं होंगे जबतक कि उनकी क्रिया-रेखायें एक ही न हों।

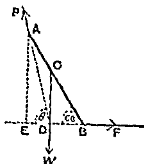
अतः R की क्रिया-रेखा O से होकर गुज़रेगी।

७८—पिछले साध्य से हम देखते हैं कि धरातल में कार्य करते हुये तीन बलों के समतुलन के नियम आसानी से मालूम किये जा सकते हैं। चूँकि तीनों बल एक विन्दु से होकर गुज़रेंगे, इसलिये लामी के प्रमेय (धारा ४०) का प्रयोग करके, अथवा बलों को दो समकोणीय दिशाओं में विश्लिष्ट करके (धारा ४६), अथवा लेखा-चित्रीय रचना से, हम वाञ्छित नियम मालूम कर सकते हैं।

उदाहरण १। एक भारी सम दंड AB, A पर किसी नियत बिन्दु से कब्जे द्वारा लगा हुआ है, और उसके नीचे के सिरे B पर एक क्षैतिज बल लगाया गया है जिसके प्रयोग से दंड क्षैतिज से 60° का कोण बनाता है; कब्जे पर प्रति-बल और F का परिमाण मालूम करो।

मान लो दंड के मध्य-विन्दु C से खींची गई उर्ध्वाधर रेखा B से

खींची गई क्षैतिज रेखा को D पर मिलती है और मान लो दंड का भार W है।



दंड पर केवल तीन बल, अर्थात् बल F, भार W, और कब्जे का अज्ञात प्रतिबल P, कार्य करते हैं।

इसलिये यह तीनों एक बिन्दु पर मिलेंगे।

और चूंकि F और W, D पर मिलते हैं, इसलिये कब्जे पर प्रतिबल की क्रिया-रेखा DA ही होगी।

EB पर AE लम्ब डालो, और मान लो कोण ADE, θ के बराबर है।

इसलिये स्पज्या $\theta=\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{2AE}{EB}=2$स्पज्या $60°=2\sqrt{3}$.

और लामी के प्रमेय से,

$$\frac{F}{\text{ज्या } WDA}=\frac{W}{\text{ज्या } ADB}=\frac{P}{\text{ज्या } WDB},$$

अर्थात्

$$\frac{F}{\text{ज्या }(90°+\theta)}=\frac{W}{\text{ज्या }(180°-\theta)}=\frac{P}{\text{ज्या } 90°}.$$

$$\therefore\quad F=W\frac{\text{कोज्या }\theta}{\text{ज्या }\theta}=W\text{ कोस्पज्या }\theta=\frac{W}{2\sqrt{3}}=\frac{W}{6}\sqrt{3},$$

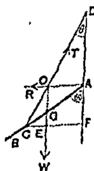
और

$$P=W\frac{1}{\text{ज्या }\theta}=W\sqrt{1+\text{कोस्पज्या}^2\theta}=W\sqrt{\frac{13}{12}}.$$

अन्यथा इस प्रकार। ADE बल-त्रिभुज है, क्योंकि इसकी भुजायें बलों के समानान्तर हैं। अतः θ को हम नाप सकते हैं, और

$$\frac{P}{AD}=\frac{F}{ED}=\frac{W}{AE}.$$

उदाहरण २। एक सम दंड AB ऊर्ध्वाधर से $60°$ का कोण बनाता है, उसका सिरा A एक चिकना ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है और दंड के एक विन्दु C से, जो B से एक फुट का दूरी पर है, बँधी हुई एक डोरी जो A से ठीक ऊपर दीवार के एक विन्दु पर लगे हुये छल्ले से बंधी हुई है, दंड को सम्हाले हुये है; यदि दंड 4 फुट लम्बा है, तो छल्ले का स्थान और डोरी का झुकाव और तनाव मालूम करो।



मान लो दीवार पर A से खींचा गया लम्ब और दंड के मध्य-विन्दु G से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा O पर मिलती है।

इसलिये तीसरा बल, डोरी का तनाव T, O से होकर गुज़रेगा। इसलिये CO बढ़ाये जाने पर छल्ले के स्थान D से होकर गुज़रेगी।

मान लो कोण $CDA=\theta$, और क्षैतिज रेखा CEF खींचो जो OG को E और दीवार को F पर मिले।

$$\text{अब स्पज्या } \theta = \text{स्पज्या } COE = \frac{CE}{OE} = \frac{CG \text{ ज्या } CGE}{AF}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\text{ज्या } 60°}{\text{कोज्या } 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \ \theta = 30°.$$

$$\therefore \ ACD = 60° - \theta = 30°.$$

अतः $AD = AC = 3$ फुट, जिससे छल्ले का स्थान निकल आता है।

यदि R दीवार पर प्रतिबल और W दंड का भार है, और चूंकि बल त्रिभुज AOD की भुजाओं के अनुपातीय हैं, इसलिये

$$\frac{T}{OD} = \frac{R}{AO} = \frac{W}{DA}.$$

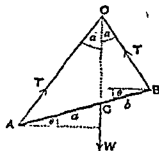
$$\therefore\ T = W\frac{OD}{DA} = \frac{W}{\text{कोज्या}30^\circ} = W.\frac{2}{\sqrt{3}},$$

और
$$R = W\frac{AO}{DA} = W\ \text{स्पज्या}\ 30^\circ = W..$$

उदाहरण ३ । एक दंड के सिरों पर एक डोरी जिसकी लम्बाई l है बंधी हुई है, और डोरी एक छोटे चिकने खूंटे के ऊपर होकर लटकी हुई दंड को साधे हुये है। दंड का उसका गुरुत्व-केन्द्र दो भागों में, जिनकी लम्बाई a और b है, बाँटता है। दंड की वह समतुलित अवस्था मालूम करो जब कि वह ऊर्ध्वाधर अवस्था में नहीं है।

[नोट—किसी पिंड का गुरुत्व-केन्द्र वह बिन्दु है जिस पर उसका भार कार्य करता हुआ मान लिया जाता है।]

मान लो AB दंड है और C उसका गुरुत्व-केन्द्र है, और मान लो O खूंटी है और डोरी के भाग AO और OB की लम्बाइयाँ क्रम से x और y है।



चूंकि पिंड पर केवल तीन बल कार्य करते हैं इसलिये वे एक ही बिन्दु पर मिलेंगे।

परन्तु दोनों तनाव O से होकर गुजरते हैं, इसलिये भार W की क्रिया-रेखा भी O से होकर गुजरेगी, और इसलिये CO ऊर्ध्वाधर होगी।

चूंकि डोरी चिकनी खूंटी के ऊपर होकर गुजरती है इसलिये उसके तनाव में कोई परिवर्तन नहीं होता; और चूंकि W इन दोनों बराबर बलों के परिणामीबल से समतुलित है इसलिये वह इनके बीच के कोण को समविभाजित करेगा।

$$\therefore\ \angle AOC = \angle BOC = \alpha\ \text{(मान लो)}.$$

अतः ज्यामिति से, $\quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{a}{b}.$

और $x+y=l.$

$\therefore$ इन समीकरणों को हल करके,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{l}{a+b}\text{..............................}(१).$$

और त्रिभुज AOB से,

$$(a+b)^2=x^2+y^2-2xy \text{ कोज्या } 2\alpha=(x+y)^2-2xy(1+\text{कोज्या } 2\alpha)$$

$$=(x+y)^2-4xy \text{ कोज्या}^2\alpha=l^2-4\frac{l^2ab}{(a+b)^2}\text{ कोज्या}^2\alpha.$$

$$\therefore \text{ कोज्या}^2\alpha=\frac{l^2-(a+b)^2}{4l^2}\cdot\frac{(a+b)^2}{ab}\text{..........................}(२).$$

इस समीकरण से α मालूम हो जायगा।

मान लो दंड का क्षतिज से झुकाव θ है, इसलिये

$$OCA=90^\circ+\theta.$$

त्रिभुज ACO से,

$$\frac{\text{ज्या }(90^\circ+\theta)}{\text{ज्या }\alpha}=\frac{AO}{AC}=\frac{x}{a}=\frac{l}{a+b},\quad (१)\text{ से।}$$

$$\therefore \text{ कोज्या } \theta=\frac{l\text{ ज्या } a}{a+b},$$

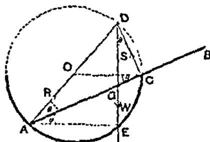
जिससे θ निकल आयगा।

और बलों को ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लिष्ट करके $2T$ कोज्या $a=W$, जिससे T निकल आता है।

संख्यात्मक उदाहरण। यदि दंड की लम्बाई 5 फुट और डोरी की लम्बाई 7 फुट है, और दंड का गुरुत्व-केन्द्र उसे 4 : 3 की निष्पत्ति में विभाजित करता है, तो सिद्ध करो कि डोरी के भाग परस्पर लम्ब हैं, और दंड का क्षैतिज से झुकाव स्पज्या$^{-1}\frac{1}{7}$ है, और डोरी के तनाव की दंड के भार से निष्पत्ति $\sqrt{2}:2$ है।

उदाहरण ४। एक भारी सम दंड जिसकी लम्बाई $2a$ है, का कुछ भाग एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर रखा है और कुछ भाग बाहर है; प्याले का किनारा क्षैतिज है और उसकी त्रिज्या r है, और दंड का एक बिन्दु किनारे को स्पर्श करता है। यदि दंड क्षैतिज से कोण θ बनाता है, तो सिद्ध करो कि $2r$ कोज्या $2\theta = a$ कोज्या θ।

मान लो चित्र दंड में होकर गुजरते हुये अर्द्धगोल के ऊर्ध्वाधर परिच्छेद को प्रदर्शित करता है।



मान लो AB दंड है, G उसका गुरुत्व-केन्द्र और C वह बिन्दु है जहाँ दंड प्याले के किनारे को मिलता है।

A पर प्रतिबल प्याले के केन्द्र O से होकर खींची गई रेखा के ऊपर कार्य करेगा, क्योंकि AO ही केवल एक मात्र रेखा है जो A से होकर खींची गई है और A पर प्याले के धरातल पर लम्ब है।

C पर प्रतिबल भी दंड पर लम्ब है, क्योंकि यही एक दिशा है जो दोनों दंड और प्याले के किनारे पर लम्ब है।

यह दोनों प्रतिबल D पर मिलते हैं; और [illegible] से D उस ज्यामितीय गोल पर होगा जिसका [illegible] है।

अतः दंड के मध्यविन्दु G से होकर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा D से होकर गुजरेगी।

A से होकर AE क्षैतिज रेखा [illegible] DC को [illegible] और OC को मिला दो।

चूंकि OC और AE समानान्तर हैं,

$$\therefore \angle OCA = \angle CAE = \theta.$$

चूंकि $OC = OA, \ \therefore \ \angle OAC = \angle OCA = \theta.$

और $\angle GDC = 90° - \angle DGC = \theta.$

$\therefore$ $AE = AG$ कोज्या $\theta = a$ कोज्या θ,

और $AE = AD$ कोज्या $2\theta = 2r$ कोज्या 2θ.

$\therefore$ $2r$ कोज्या $2\theta = a$ कोज्या θ,

जिससे θ निकल आयगा।

और लामी के प्रमेय से, यदि A और C पर R और S प्रतिबल हैं, तो

$$\frac{R}{\text{ज्या } \theta} = \frac{S}{\text{ज्या } ADG} = \frac{W}{\text{ज्या } ADC},$$

अर्थात्

$$\frac{R}{\text{ज्या } \theta} = \frac{S}{\text{कोज्या } 2\theta} = \frac{W}{\text{कोज्या } \theta}.$$

संख्यात्मक उदाहरण। यदि $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, तो $\theta = 30°$ और

$$R = S = W\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

उदाहरण ५। एक छड़, जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसे a और b दो भागों में विभाजित करता है, एक चिकने गोल के भीतर रक्खी हुई है; यदि समतुलित अवस्था में क्षैतिज से उसका झुकाव θ है और गोल के केन्द्र पर छड़ $2a$ कोण बनाती है, तो सिद्ध करो कि

$$\text{स्पज्या } \theta = \frac{b-a}{b+a} \text{ स्पज्या } a.$$

इस स्थिति में छड़ के सिरों पर दोनों प्रतिबल R और S गोल के केन्द्र O में होकर गुजरेंगे। अतः छड़ का गुरुत्व-केन्द्र G, O के ठीक ऊर्ध्वाधर नीचे होगा।

मान लो OG, A में होकर खींची गई क्षैतिज रेखा को N पर मिलती है।

AB पर OD लम्ब खींचो ।

अब $\angle AOD = \angle BOD = \alpha$,

और $\angle DOG = 90° - \angle DGO = \angle DAN = \theta$.

अतः $\frac{a}{b} = \frac{AG}{GB} = \frac{AD - GD}{BD + GD} = \frac{OD \text{ स्पज्या } AOD - OD \text{ स्पज्या } GOD}{OD \text{ स्पज्या } BOD + OD \text{ स्पज्या } GOD}$

$= \frac{\text{स्पज्या } \alpha - \text{स्पज्या } \theta}{\text{स्पज्या } \alpha + \text{स्पज्या } \theta}$.

$\therefore$ स्पज्या $\theta = \frac{b-a}{b+a}$ स्पज्या α.

इस समीकरण से θ मालूम हो जायगा ।

और लामी के प्रमेय से,

$$\frac{R}{\text{ज्या } BOG} = \frac{S}{\text{ज्या } AOG} = \frac{W}{\text{ज्या } AOB}.$$

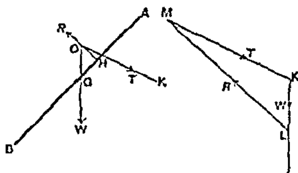
$$\therefore \frac{R}{\text{ज्या } (\alpha+\theta)} = \frac{S}{\text{ज्या } (\alpha-\theta)} = \frac{W}{\text{ज्या } 2\alpha},$$

जिनसे प्रतिबल मालूम हो जायेंगे ।

संख्यात्मक उदाहरण । यदि छड़ का भार 40 पौं० है, और वह गोल के केन्द्र पर एक समकोण बनाती है, और यदि उसका गुरुत्व-केन्द्र उसे 1 : 2 की निष्पत्ति में विभाजित करता है तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से उसका झुकाव स्पज्या$^{-1}\frac{1}{3}$ है, और प्रतिबल क्रम से $8\sqrt{5}$ और $16\sqrt{5}$ पौं० भार के बराबर है ।

उदाहरण ६। सिद्ध करो कि किसी पतंग पर कार्य करते हुये बल उसे किस प्रकार सन्तुलित अवस्था में रखते हैं ; इस बात का प्रमाण देते हुये कि पतंग पर खींचा गया लम्ब, डोरी की दिशा और ऊर्ध्वाधर के बीच में होगा।

मान लो AB पतंग की मध्य रेखा है, और बिन्दु B पर पुच्छ लगी हुई है ; पतंग का धरातल कागज के धरातल पर लम्ब है। मान लो पुच्छ सहित पतंग का गुरुत्व-केन्द्र G है।



हवा की क्रिया को पतंग के प्रत्येक बिन्दु पर दो अवयव बलों में विश्लिष्ट कर सकते हैं, जिनमें से एक पतंग पर लम्ब होगा और दूसरा उसके धरातल के सीध में होगा। दूसरे अवयव बलों का उस पर कोई प्रभाव नहीं होगा और इन्हें छोड़ दिया जा सकता है। पहले अवयव बलों को एक मात्र बल R में संयोजित किया जा सकता है जो पतंग पर लम्ब होगा और बिन्दु H पर जो G से कुछ ऊपर है कार्य करेगा।

R और W, O पर मिलते हैं और इसलिये O में से होकर डोरी के तनाव T की क्रिया-रेखा गुजरेगी।

KL ऊर्ध्वाधर भार W को प्रदर्शित करती हुई, और LM, HO के समानान्तर R को प्रदर्शित करती हुई खींचो।

इसलिये बल त्रिभुज से, MK डोरी के तनाव T को प्रदर्शित करेगी।

चित्र से स्पष्ट है कि रेखा MK ऊर्ध्वाधर LK से रेखा LM की अपेक्षा बड़ा कोण बनायगी अर्थात् पतंग पर लम्ब ऊर्ध्वाधर और डोरी की दिशा के बीच में होगा।

बल-त्रिभुज से यह भी स्पष्ट है कि T और W दोनों हवा से लगे हुये बल R से कम होंगे।

७९—त्रिकोणमितीय साध्य। दो त्रिकोणमितीय साध्य ऐसे हैं जो स्थिति सम्बन्धी प्रश्नों के हल करने में प्रायः कार्य में आते हैं:— यदि किसी त्रिभुज ABC के आधार में P कोई बिन्दु है, और यदि CP, AB को m और n दो भागों में और कोण C को α और β दो भागों में विभाजित करती है, और यदि कोण CPB, θ के बराबर है, तो

$$(m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta = m \text{ कोस्पज्या } \alpha - n \text{ कोस्पज्या } \beta \quad \ldots \ldots \quad (१),$$

और $$(m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta = n \text{ कोस्पज्या } A - m \text{ कोस्पज्या } B \quad \ldots \ldots \quad (२).$$

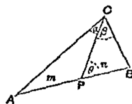
चूंकि $$\frac{m}{n} = \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{PC}{PB} = \frac{\text{ज्या } ACP}{\text{ज्या } PAC} \cdot \frac{\text{ज्या } PBC}{\text{ज्या } PCB}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{ज्या}(\theta - \alpha)} \cdot \frac{\text{ज्या } (\theta + \beta)}{\text{ज्या } \beta}, \text{ क्योंकि } \angle PBC = 180° - (\beta + \theta),$$

$$= \frac{\text{ज्या } \alpha \, (\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } \beta + \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } \beta)}{\text{ज्या } \beta \, (\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } \alpha - \text{कोज्या } \theta \text{ ज्या } \alpha)}$$

$$= \frac{\text{कोस्पज्या } \beta + \text{कोस्पज्या } \theta}{\text{कोस्पज्या } \alpha - \text{कोस्पज्या } \theta},$$

$$\therefore m \text{ कोस्पज्या } \alpha - n \text{ कोस्पज्या } \beta = (m+n) \text{ कोस्पज्या } \theta.$$



और $$\frac{m}{n} = \frac{\text{ज्या } ACP \text{ ज्या } PBC}{\text{ज्या } PAC \text{ ज्या } PCB}$$

$$= \frac{\text{ज्या } (\theta - A)}{\text{ज्या } A} \cdot \frac{\text{ज्या } B}{\text{ज्या } (\theta + B)}$$

$$= \frac{(\text{ज्या}\,\theta\,\text{कोज्या}\,A - \text{कोज्या}\,\theta\,\text{ज्या}\,A)\,\text{ज्या}\,B}{\text{ज्या}\,A\,(\text{ज्या}\,\theta\,\text{कोज्या}\,B + \text{कोज्या}\,\theta\,\text{ज्या}\,B)}$$

$$= \frac{\text{कोस्पज्या}\,A - \text{कोस्पज्या}\,\theta}{\text{कोस्पज्या}\,B + \text{कोस्पज्या}\,\theta}.$$

$\therefore\ (m+n)$ कोस्पज्या $\theta = n$ कोस्पज्या $A - m$ कोस्पज्या $B.$

इन सूत्रों का प्रयोग धारा ७८ के उदाहरण ५ में किया जा सकता है सूत्र (२) से

$(a+b)$ कोस्पज्या $OGB = b$ कोस्पज्या $OAB - a$ कोस्पज्या OBA,

अर्थात् $(a+b)$ स्पज्या $\theta = b$ स्पज्या $a - a$ स्पज्या a.

इनके प्रयोग के और उदाहरण इस पुस्तक में आगे चल कर पाये जायेंगे।

उदाहरणमाला ११

१। एक सम दड AB, जिसका भार W है, ऊर्ध्वाधर धरातल में A पर एक कब्जे के चारों ओर घूम सकता है। भार P उसे समतुलित अवस्था में रखे हुये है और वह एक चिकनी खूंटी C के ऊपर होकर डोरी BCP से बँधा हुआ है। AC ऊर्ध्वाधर है; यदि $AC=AB$, तो सिद्ध करो कि $P=W$ कोज्या ACB.

२। एक सम दंड अपने एक सिरे के चारों ओर बेरोक घूम सकता है और एक क्षैतिज बल जो उसके दूसरे सिरे पर लगाया गया है उसे ऊर्ध्वाधर से एक ओर खींचे हुये है। यह क्षैतिज बल दंड के भार से आधा है; बताओ दंड ऊर्ध्वाधर से कौनसा कोण बनायेगा ?

३। एक सम दंड AB को, जो A पर कब्जे द्वारा लगा हुआ है, एक डोरी BC जो दंड से $45°$ का कोण बनाती है, क्षैतिज अवस्था में रक्खे हुये है और दंड के सिरे B से 10 पौ० का भार लटका हुआ है। यदि दंड हल्का है तो डोरी का तनाव और कब्जे पर प्रतिबल मालूम करो।

४। एक सम भारी दंड AB का सिरा A एक चिकनी ऊर्ध्वाधर

दीवार से टिका हुआ है ; एक डोरी का एक सिरा दंड के एक बिन्दु C से और दूसरा सिरा दीवार से इस प्रकार बँधा हुआ है कि $AC = \frac{1}{4} AB$; डोरी की लम्बाई मालूम करो जबकि दंड ऊर्ध्वाधर से किसी कोण पर झुका हुआ है।

५। ACB एक सम दंड है जिसका भार W है ; उसका सिरा A एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार AD पर टिका हुआ है और उसे CD डोरी B को ऊपर रखते हुये थामे हुये है ; DB क्षैतिज है और CD दीवार से $30°$ का कोण बनाती है। डोरी का तनाव और दीवार का प्रतिबल मालूम करो, और सिद्ध करो कि $AC = \frac{1}{3} AB$.

६। एक सम दंड AB का एक सिरा A एक चिकनी दीवार पर टिका हुआ है और उसे BC डोरी, जो उसके दूसरे सिरे B से और A के ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर C बिन्दु से बँधी हुई है, थामे हुये है। एक चित्र खींचो जिसमें दंड को समतुलित अवस्था में रखने वाले बलों की क्रिया-रेखायें दिखलाई गई हों, और सिद्ध करो कि डोरी का तनाव दंड के भार से अधिक है।

७। दी हुई लम्बाई के एक सम दंड AB का सिरा A एक चिकनी दीवार पर टिका हुआ है, और उसे डोरी CD जो उसके किसी ज्ञात बिन्दु C से और दीवार पर एक बिन्दु D से बँधी हुई है, थामे हुये है ; यदि दीवार से दंड का झुकाव दिया हुआ हो, तो ज्यामितीय रचना द्वारा बताओ कि डोरी CD की लम्बाई और A के ऊपर D की ऊँचाई किस प्रकार मालूम की जा सकती है।

सिद्ध करो कि प्रश्न तब ही सम्भव हो सकता है जब कि AC $\frac{1}{2}$ AB से छोटी अथवा बड़ी होने के अनुसार दिया हुआ कोण BAD न्यून अथवा अधिक हो।

८। एक सम दंड की लम्बाई a है और उसका एक सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार से टिका हुआ है। दंड को एक डोरी जिसकी लम्बाई l है और जो दंड के दूसरे सिरे से बँधी हुई है थामे हुये है। डोरी का दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु से बँधा हुआ है : सिद्ध करो कि दंड दीवार से कोण θ बनाती हुई

टिकी रहेगी जबकि कोज्या$^2\theta=\frac{l^2-a^2}{3a^2}$. समतुलित अवस्था होने के लिये निष्पत्ति $a:l$ की सीमायें क्या होंगी ?

९। दो बराबर भार P दो डोरियों ACP और BCP से बँधे हुये हैं जो एक चिकनी खूटी C के ऊपर होकर जाती है। AB एक भारी छड़ है, जिसका भार W है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र A से a फुट और B से b फुट है ; सिद्ध करो कि AB क्षैतिज से कोण

$$\text{स्पज्या}^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\text{स्पज्या}\left(\text{ज्या}^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$

बनाती है।

१०। एक भारी सम छड़ किसी नियत बिन्दु से दो डोरियों द्वारा जो उसके सिरों से बँधी हुई है, लटकी हुई है ; यदि डोरियों और छड़ की लम्बाई $2:3:4$ के अनुपात में है, तो सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव और दंड का भार $2:3:\sqrt{10}$ के अनुपात में होंगे।

११। एक भारी सम दंड, जिसकी लम्बाई 15 इंच है, एक नियत बिन्दु से 9 और 12 इंच लम्बी दो डोरियों द्वारा जो उसके सिरों से बँधी हुई हैं लटका हुआ है ; यदि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाता है, तो सिद्ध करो कि

$$25\,\text{ज्या}\,\theta=24.$$

१२। एक सीधा सम दंड, जिसका भार 3 पौं० है, एक खूँटी से दो डोरियों द्वारा, जिन के एक सिरे खूँटी से और दूसरे सिरे दंड के सिरों से बँधे हुये हैं, लटका हुआ है ; डोरियों के बीच का कोण एक समकोण है, और एक डोरी दूसरी से दुगनी है ; डोरियों के तनाव मालूम करो।

१३। दो बराबर भारी गोले एक गोलीय प्याले के भीतर समतुलित अवस्था में रखे हुये हैं ; गोलों की त्रिज्या 1 इंच और प्याले की त्रिज्या 3 इंच है। सिद्ध करो कि प्याले और एक गोले के बीच का प्रतिबल दोनों गोलों के बीच के प्रतिबल से दुगना है।

१४। एक गोला जिसका भार W दिया हुआ है दो चिकने धरातलों के

बीच में रखा हुआ है, एक धरातल ऊर्ध्वाधर है और दूसरा ऊर्ध्वाधर से कोण α बनाता है ; धरातलों के प्रतिबल मालूम करो।

१५। एक दृढ़ ठोस गोला दो समानान्तर छड़ों पर रखा हुआ है जो एक ही क्षैतिज धरातल में है। दोनों छडों के बीच की दूरी गोले की त्रिज्या के बराबर है ; प्रत्येक छड़ का प्रतिबल मालूम करो।

√१६। एक चिकना गोला एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से स्पर्श करता हुआ एक डोरी से थमा हुआ है जो उसके पृष्ट के एक बिन्दु से बँधी हुई है और जिसका दूसरा सिरा दीवार के एक बिन्दु से बँधा हुआ है ; यदि डोरी की लम्बाई गोले की त्रिज्या के बराबर है, तो ऊर्ध्वाधर से डोरी का झुकाव, उसका तनाव, और दीवार का प्रतिबल मालूम करो।

१७। एक तसवीर जिसका भार दिया हुआ है एक चिकनी दीवार पर ऊर्ध्वाधर लटकी हुई है और एक डोरी से सधी हुई है जो दीवार में गड़ी हुई एक खूँटी के ऊपर होकर जाती है ; डोरी के सिरे तसवीर के ऊपर के किनारे के दो विन्दुओ से बँधे हुये हैं जो किनारे के मध्य-बिन्दु से बराबर दूरी पर हैं। यह किनारा खूँटी पर 60° का कोण वनाती है। इस स्थिति में तुलना उस स्थिति से करो जबकि डोरी की लम्बाई अपनी मौलिक तनाव की लम्बाई की दो तिहाई कर दी जाय।

१८। एक तसवीर, जिसका भार 40 पौ० है, एक डोरी से, जो उसके ऊपर के दो कोनों से बँधी हुई है और एक कील के ऊपर होकर गुजरती है, इस प्रकार लटकी हुई है कि उसके ऊपर के और नीचे के किनारे क्षैतिज है और डोरी के दोनों भाग कील पर 60° का कोण बनाते हैं। डोरी का तनाव मालूम करो।

१९। एक तसवीर सममित् अवस्था मे एक डोरी से लटकी हुई है। डोरी एक कील के ऊपर होकर जाती है और तसवीर के दो छल्लों से बँधी हुई है ; यदि डोरी 4 फुट लम्बी है और कील छल्लों को मिलाने वाली क्षैतिज रेखा से 1 फुट 6 इंच की दूरी पर है, और तसवीर का भार 10 पौं० है, तो डोरी का तनाव क्या होगा ?

२०। एक आयताकार तसवीर एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिकी हुई है और उसे दो विन्दुओं से बँधी हुई दो समानान्तर डोरियाँ जिनके दूसरे सिरे तसवीर के पिछले हिस्से के ऊपर के किनारे के दो विन्दुओं से बँधे हुये हैं, साधे हुये हैं। प्रत्येक डोरी की लम्बाई तसवीर की ऊँचाई के बराबर है। यदि तसवीर का गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र पर हो, तो सिद्ध करो कि तसवीर दीवार पर ऊर्ध्वाधर से कोण स्पज्या$^{-1}\frac{b}{3a}$ बनाती हुई टिकी रहेगी जहाँ तसवीर की ऊँचाई a और उसकी मोटाई b है।

२१। एक तसवीर को ऊर्ध्वाधर दीवार पर इस प्रकार टाँगना है कि वह दीवार से कोण α बनाये और एक डोरी से सधी रहे जो दीवार पर तसवीर के नीचे के किनारे से दी हुई ऊँचाई h पर एक विन्दु पर बँधी हो; ज्यामितीय रचना द्वारा तसवीर के पीछे उस विन्दु का स्थान मालूम करो जहाँ पर डोरी बाँधी जाय और डोरी की लम्बाई भी मालूम करो।

२२। एक दंड एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर पूरा रखा हुआ है। प्याले की त्रिज्या r है और दंड का गुरुत्व-केन्द्र उसे a और b दो भागों में विभाजित करता है। यदि समतुलित अवस्था में दंड क्षैतिज से कोण θ बनाता है, तो सिद्ध करो कि ज्या $\theta=\frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$, और दंड और प्याले के बीच के प्रतिबल भी मालूम करो।

२३। एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर एक भारी दंड रखा हुआ है जिसकी लम्बाई प्याले की त्रिज्या के बराबर है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके एक सिरे से उसकी लम्बाई की एक तिहाई की दूरी पर है; सिद्ध करो कि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण स्पज्या$^{-1}(3\sqrt{3})$ बनाता है।

२४। 4 इंच लम्बे एक सम दंड का एक सिरा एक चिकने अर्द्धगोलीय प्याले के भीतर रखा हुआ है, प्याले की धुरी ऊर्ध्वाधर है और त्रिज्या

$\sqrt{3}$ इंच है, सिद्ध करो कि दड का चौथाई भाग उसके किनारे से बाहर निकला रहेगा।

यह भी सिद्ध करो कि सबसे छोटे दंड की लम्बाई जो इस प्रकार रखा जा सकता है $2\sqrt{2}$ इंच है।

निम्न प्रश्न को लेखा-चित्र द्वारा हल करना चाहिये।

२५। 10 फुट लम्बी एक भारी छड़ AB, A को ऊपर किये हुये दो रस्सियों से सधी हुई है जो A और B से इस प्रकार बँधी हुई है कि वे क्षैतिज से क्रमशः $55°$ और $50°$ के कोण बनाती हैं, यदि AB क्षैतिज मे $20°$ का कोण बनाती है, तो बताओ A से उसका गुरुत्व-केन्द्र कितनी दूर है। यदि छडका भार 200 पौं० है तो दोनों रस्सियों के तनाव मालूम करो।

२६। 2 फुट लम्बा एक हल्का दंड AB एक नियत आलम्बन से A पर एक चिकने कब्जे द्वारा लगा हुआ क्षैतिज अवस्था में है ; D पर जहाँ (AB=9 इंच) दड 100 पौं० का भार सम्हाले हुये है, और उसे एक हल्का दंड CB रोके हुये है। C, A के ठीक नीचे है और AC=6 इंच। दंड CB पर दबाव मालूम करो।

२७। AB एक सम छड़ है जो C पर एक चूल के चारों ओर घूम सकती है। उसे एक हल्की डोरी AD जो उसके सबसे ऊँचे विन्दु A से और C के ठीक नीचे एक बिन्दु D से बँधी हुई है, समतुलित अवस्था में रखे हुये है। यदि AB=3 फुट, AC=1 फुट, CD=2 फुट और DA=2·7 फुट, और छड़का भार 10 पौ० है, तो डोरी का तनाव और चूल पर प्रतिबल मालूम करो।

२८। एक केन्टीलीवर (दीवारगीरी) में एक क्षैतिज दंड AB है जो A पर एक नियत आलम्बन से कब्जे द्वारा लगा हुआ है। एक और दंड DC भी है, जो AB के एक बिन्दु C पर और B के ठीक नीचे एक नियत बिन्दु D पर भी कब्जे द्वारा लगा हुआ है। B पर 1 हण्ड्रेडवेट का भार

लगा हुआ है ; A और C पर प्रतिबल मालूम करो, जहां $AB=6$ फुट, $AC=2$ फुट, और $AD=3$ फुट, और दंडो के भार नगण्य माने गये हैं ।

२९ । एक पतंग जिसका भार 10 पौं० है, क्षैतिज से 60° का कोण बनाती है । उसपर हवा के दबाव का परिणामीबल उसके गुरुत्व-केन्द्र से 8 इंच ऊपर कार्य करता है और डोरी उससे 10 इंच ऊपर एक बिन्दु से बँधी हुई हैं । डोरी का तनाव और हवा का दबाव मालूम करो ।

अध्याय ८

एक धरातल में बलों से कार्य किये जाते हुये दृढ़ पिंड के समतुलन के साधारण नियम।

(General Conditions of Equilibrium of a Rigid body acted on by a system of Forces in a Plane).

८०—साध्य। एक धरातल में किसी दृढ पिंड पर कार्य करते हुये बलों का कोई समुदाय एक मात्र बल अथवा एक मात्र बलयुग्म में परिणत किया जा सकता है।

बल समानान्तर चतुर्भुज से कोई दो बल जिनकी क्रिया-रेखायें समानान्तर नहीं हैं, एक बल में संयोजित किये जा सकते हैं; और धारा ५२ से, दो समानातर बल भी, जो बराबर और विषम नहीं है, एक बल में संयोजित किये जा सकते हे।

पहले दिये हुये समुदाय के सब समानान्तर बलों को संयोजित करो।

इस प्रकार प्राप्त हुये समुदाय के किन्ही उन दो बलों का, जो किसी बलयुग्म की रचना न करते हो, परिणामीबल R_1 मालूम करो, और R_1 और समुदाय के किसी उपयुक्त तीसरे बल का परिणामीबल R_2 निकालो; फिर R_2 और समुदाय के किसी उपयुक्त चौथे बल का परिणामीबल निकालो; इत्यादि जबतक कि सब बल न ले लिये जायें।

अंत में हमारे पास या तो एक मात्र बल रह जायगा या दो बराबर समानान्तर विषम बल रह जायेंगे जो एक बलयुग्म की रचना करेंगे।

८१—साध्य। यदि एक धरातल में बलों का कोई समुदाय किसी पिंड पर कार्य करे और यदि धरातल में किन्हीं तीन बिन्दुओं पर (जो समरेखीय नहीं हैं) उनके घूर्णों का बीजीय योग पृथक पृथक शून्य हो. तो बलों का समुदाय समतुलित होता है।

पिछली धारा से बलों का कोई समुदाय या तो एक मात्र बल या एक मात्र बलयुग्म में संयोजित किया जा सकता है।

परन्तु यहाँ वह एक मात्र बलयुग्म में संयोजित नहीं किया जा सकता, क्योंकि यदि किया जा सकता तो धरातल में किसी बिन्दु पर बलों के घूर्णों का योग, धारा ६९ से, स्थिर होता जो शून्य नहीं हो सकता, और यह हमारी कल्पना के विरुद्ध है।

अतः बलों का समुदाय एक मात्र बलयुग्म में संयोजित नहीं हो सकता।

इसलिये समुदाय या तो समतुलित होगा या एक मात्र बल F में संयोजित किया जा सकेगा।

मान लो वे तीन बिन्दु जिनपर घूर्ण निकालने हैं $A, B,$ और C हैं।

क्योंकि बलों के समुदाय के घूर्णों का बीजीय योग उनके परिणामीबल के घूर्ण के बराबर होता है (धारा, ६२), इसलिये A पर F का घूर्ण शून्य होगा।

अत या तो F शून्य है या A से होकर गुजरता है।

इसी प्रकार, क्योंकि B पर F का घूर्ण शून्य है या तो F शून्य होगा या B से होकर गुजरेगा, अर्थात् या तो F शून्य है या AB रेखा पर कार्य करता है।

अंत में क्योंकि C पर घूर्ण शून्य है या तो F शून्य होगा या C से होकर गुजरेगा।

परन्तु (क्योंकि A, B, और C समरेखीय नहीं हैं) C से होकर गुजरता हुआ बल AB पर कार्य नहीं कर सकता।

अतः ग्राह्य स्थिति केवल वही है जब F शून्य हो अर्थात् बल समतुलित हों।

समुदाय उस स्थिति में भी समतुलित होता है जब (१) घूर्णों का योग दोनों बिन्दुओं A और B में से प्रत्येक पर, पृथक पृथक शून्य हों, और (२) AB पर बलों के विश्लिष्ट भागों का योग शून्य हो। क्योंकि यदि (१) सत्य है तो परिणामीबल या तो शून्य होगा या AB पर कार्य करेगा; और यदि (२) सत्य है तो AB पर कोई परिणामीबल नहीं हो

सकता ; अतः परिणामीबल शून्य है। और जैसा कि इस धारा में देख आये हैं समुदाय का कोई परिणामीबलयुग्म नहीं है, अत. समुदाय समतुलित है।

८२—साध्य। एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये बलों का कोई समुदाय समतुलित होता है जबकि धरातल में दो रेखाओं में से प्रत्येक के समानान्तर उनके अवयव बलों का योग शून्य हो और किसी बिन्दु पर उनके घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य हो।

धारा ८० से बलों का ऐसा समुदाय, या तो एकमात्र बल में या एक मात्र बलयुग्म में संयोजित किया जा सकता है।

परन्तु यहाँ बल एकमात्र बल में संयोजित नहीं किये जा सकते, क्योंकि धरातल में दो रेखाओं के समानान्तर अवयव बलो का योग पृथक पृथक शून्य हैं, इसलिये उनके परिणामीबल के इन दो रेखाओं के समानान्तर अवयव बल भी शून्य होंगे और इसलिये परिणामीबल शून्य होगा।

और बल एक मात्र बलयुग्म में भी संयोजित नहीं किये जा सकते हैं, क्योंकि यदि वे किये जा सकते, तो इस बलयुग्म का घूर्ण धरातल के किसी बिन्दु पर किसी स्थिर राशि के बराबर होता जो शून्य नहीं है ; और यह हमारी कल्पना के विरुद्ध है।

अत. बलों का समुदाय समतुलित होगा।

८३—यह स्मरण रखना चाहिये कि पिछली धारा में यह कुछ नहीं कहा गया है कि बलों को किन दिशाओं में विश्लिष्ट करना है। व्यवहार में दोनों दिशाओं को परस्पर समकोणीय लेना हमेशा उत्तम होता है।

अतः एक धरातल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्य करते हुये बलों के किसी समुदाय के समतुलन के नियम इस प्रकार मालूम किये जा सकते हैं :

(१) किसी नियत दिशा में सब बलों के विश्लिष्ट भागों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो।

(२) उसकी लम्ब दिशा में सब बलों के विश्लिष्ट भागों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो।

(३) धरातल के किसी बिन्दु पर बलों के घूर्णों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखो।

(१) और (२) से यह निश्चित हो जाता है कि पिंड अपने स्थान से गति नही करता और (३) से यह निश्चित हो जाता है कि उसमें किसी बिन्दु पर भ्रमण गति नही है।

ऊपर के तीन स्थिति सम्बन्धी नियम और समुदाय के अवयव भागों के बीच के ज्यामितीय सम्बन्ध एक धरातल में कार्य करते हुये बलों के समतुलन के नियमों को निर्णय करने में साधारणतः पर्याप्त होते हैं।

समतुलन के इन नियमों को किसी विशेष स्थिति मे प्रयोग करते समय उन दिशाओं को ठीक से मानने में जिनके ऊपर बलों को विश्लिष्ट करना है, समीकरण अधिक सरल रूप में लिखे जा सकते हैं। प्रायः क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशायें सबसे अधिक उपयुक्त होती हैं।

और उस बिन्दु का ठीक से चुनना भी बहुत जरूरी है जिस पर हम बलों के घूर्ण लेते हैं, बिन्दु ऐसा लेना चाहिये कि घूर्ण के समीकरण में कम से कम बल आवे।

८४—हम देख आये हैं कि पिछली धारा में दिये गये बलों के समुदाय के समतुलन के नियम प्रर्याप्त हैं; वे आवश्यक भी हैं।

मान लो हमें यह मालूम है कि केवल पहले ही दो नियम सन्तुष्ट होते हैं। अब बलों का समुदाय एक बलयुग्म में परिणत किया जा सकता है, क्योंकि इस बलयुग्म के बल, जो बराबर और विपरीत दिशा में होंगे, इस प्रकार के होंगे कि किसी भी दिशा में उनके अवयव बल शून्य होंगे। अतः किसी तीसरी दिशा में विश्लिष्ट करने से हमें कोई और अधिक नियम नही मालूम हो सकता। ऐसी स्थिति में बल समतुलित नही होंगे जबतक कि तीसरा नियम भी संतुष्ट न हो।

पुनः, मान लो कि हमें यह मालूम है कि समुदाय के अवयव बल किसी एक दी हुई रेखा पर नष्ट हो जाते हैं, तो इस स्थिति में बलों का समुदाय एकमात्र बल में परिणत किया जा सकता है जो दिये हुये बिन्दु में

होकर दी हुई रेखा की लम्ब दिशा में कार्य कर सकता है ; अतः हम देखते हैं कि यह आवश्यक है कि अवयव बलों का योग एक और रेखा के समानान्तर भी शून्य हो ।

८५—अब हम समतुलन के साधारण नियमो के प्रयोग पर कुछ उदाहरण देंगे । किसी स्थिति सम्बन्धी प्रश्न के हल करने में विद्यार्थी को इस प्रकार बढ़ना चाहिये :

(१) सबसे पहिले दिये हुये प्रश्न के अनुसार चित्र खीचे ।

(२) फिर पिंड अथवा पिंडों पर कार्य करते हुये सब बलों को और सम्हालने वाली डोरियों के तनाव को लक्ष्य द्वारा चिन्हित करे और इस बात का ध्यान रखे कि जब कोई पिंड किसी दूसरे पिंड को दाबे अथवा जब कोई पिंड किसी दूसरे पिंड अथवा विन्दु से कब्जे द्वारा लगा हो तो उस जगह एक प्रतिबल मानना होता है जिसका मान निकालना होता है ।

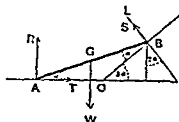
(३) प्रश्न के प्रत्येक पिंड अथवा पिंडों के समुदाय पर कार्य करते हुये बलों के दो उपयुक्त लम्ब दिशाओं (प्राय. क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर) में विश्लिष्ट भागों को शून्य के बराबर रखे ।

(४) किसी उपयुक्त विन्दु पर बलों के घूर्णों को शून्य के बराबर रखे ।

(५) चित्र में आये हुये कोणों और लम्बाइयों के ज्यामितीय सम्बन्धों को लिखे ।

उदाहरण १। एक भारी सम छड़ का एक सिरा एक क्षैतिज तल पर और दूसरा सिरा एक दिये हुये आनत तल पर रखा हुआ है; उसे एक डोरी जो छड़ के क्षैतिज तल पर रखे हुये सिरे से और क्षैतिज और आनत तलों के छेदन से बंधी हुई है समतुलित अवस्था में रखे हुये हैं; यदि छड़ का क्षैतिज से बना हुआ कोण (α) आनत तल के क्षैतिज से बने हुये कोण का आधा है, तो डोरी का तनाव और तलों पर प्रतिबल मालूम करो ।

मान लो AB छड है, AO क्षैतिज और OB आनत तल है ।



मान लो AO डोरी का तनाव T है, पिंड का भार W है, और R और S क्रमश A और B पर ऊर्ध्वाधर और OB के लम्ब दिशा में प्रतिबल है ।

क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशा मे विश्लिष्ट करने पर,

$T = S$ ज्या $2a$ . . (१),

$W = R + S$ कोज्या $2a$. (२).

A पर घूर्ण लेने पर

$W.a$ कोज्या $a = S.AB$ ज्या $ABL = S.2a$ कोज्या a (३),

जहाँ पर $2a$ छड़ की लम्बाई है ।

इन तीन समीकरणों से समतुलन की अवस्था मालूम हो जाती है।

(३) से, $S = \frac{1}{2} W.$

$\therefore$ (२) से, $R = W - \frac{1}{2} W$ कोज्या $2a = W(1 - \frac{1}{2}$ कोज्या $2a)$.

और (१) से, $T = \frac{W}{2}$ ज्या $2a$.

अत. प्रतिबल और डोरी का तनाव मालूम हो गये ।

मान लो कि क्षैतिज से छड के झुकाव की बजाय डोरी की लम्बाई $(=l)$ दी हुई है ।

मान लो क्षैतिज से छड़ का झुकाव θ है ।

समीकरण (१) और (२) पहले की भाँति वही रहेंगे परन्तु घूर्ण का समीकरण

$$W.a \text{ कोज्या } \theta = S.AB \text{ ज्या } ABL = S.2a \text{ कोज्या } ABO$$
$$= S.2a \text{ कोज्या } (2\alpha - \theta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (४)$$

हो जायगा।

अब θ मालूम करने के लिये एक और ज्यामितीय समीकरण होना चाहिये और वह यह है,

$$\frac{l}{2a} = \frac{OA}{AB} = \frac{\text{ज्या } ABO}{\text{ज्या } AOB} = \frac{\text{ज्या } (2\alpha - \theta)}{\text{ज्या } 2\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (५).$$

इस समीकरण में θ निकल आता है, और फिर समीकरण (१),(२) और (४) में $T, R,$ और S निकल आयेंगे।

यह प्रश्न छड़ और छड की लम्ब दिशा में बलों को विश्लिष्ट करके भी हल किया जा सकता है, इस स्थिति में प्रत्येक समीकरण में राशियां $T, R, S,$ और W आ जायगी और समीकरण पहले की अपेक्षा बहुत जटिल हो जायेंगे।

A पर घूर्ण निकालना भी उचित था, क्योंकि चित्र में केवल यही एक ऐसा विन्दु है जिसमें होकर पिंड पर कार्य करते हुये बलों में से दो बल गुजरते हैं।

उदाहरण २। एक छड जिसका गुरुत्वकेन्द्र उसे क्रम से a और b लम्बाई के दो भागों में बाँटता है, समतुलित अवस्था में दो चिकने धरातलों के बीच रखा हुई है; छड का एक सिरा धरातल पर है और दूसरा दूसरे धरातल पर है और धरातल एक दूसरे को एक क्षैतिज रेखा में काटते हैं और क्षैतिज से क्रमशः कोण α और β बनाते हैं; छड का क्षैतिज में झुकाव और धरातलों के प्रतिबल मालूम करो।

मान लो OA और OB धरातल हैं, और AB छड़ है जिसका गुरुत्वकेन्द्र G है, तो GA और GB क्रम से a और b हुई।

मान लो A और B पर आनत तलों के लम्ब दिशा में प्रतिबल R और S है, और छड़ का झुकाव क्षैतिज से θ है।

ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में बलों को विश्लिष्ट करने पर

R कोज्या $a+S$ कोज्या $\beta=W$ ... ... (१),

R ज्या $a=S$ ज्या β ... ... (२)

G पर घूर्ण लेने पर,

$R.GA$ ज्या $GAL=S.GB$ ज्या GBM.

चूंकि $\angle GAL=90^\circ-BOA=90^\circ-(a-\theta)$,

और $\angle GBM=90^\circ-ABO=90^\circ-(\beta+\theta)$,

अतः घूर्णों का समीकरण

$R.a$ कोज्या $(a-\theta)=S.b$ कोज्या $(\beta+\theta)$ ... ... (३)

हो जाता है।

(२) से,

$$\frac{R}{\text{ज्या}\,\beta}=\frac{S}{\text{ज्या}\,a}=\frac{R\ \text{कोज्या}\,a+S\,\text{कोज्या}\,\beta}{\text{ज्या}\,\beta\,\text{कोज्या}\,a+\text{ज्या}\,a\,\text{कोज्या}\,\beta}=\frac{W}{\text{ज्या}(a+\beta)},$$ (१) से।

इन समीकरणों से R और S मालूम हो जाते हैं; R और S के मानों को (३) में रखने पर तो

a ज्या β कोज्या $(a-\theta)=b$ ज्या a कोज्या $(\beta+\theta)$;

$\therefore$ a ज्या β (कोज्या α कोज्या θ + ज्या α ज्या θ)

= b ज्या α (कोज्या β कोज्या θ=ज्या β ज्या θ) ;

$\therefore$ $(a+b)$ ज्या α ज्या β ज्या θ

=कोज्या θ (b ज्या α कोज्या β—a कोज्या α ज्या β) ;

$\therefore$ $(a+b)$ स्पज्या θ=b कोस्पज्या β—a कोस्पज्या α.. .. ..(४),

जिससे θ का मान मालूम हो जाता है ।

अन्यथा इस प्रकार से : चूंकि पिंड पर कार्य करते हुये केवल तीन बल हैं, अत. यह प्रश्न पिछले अध्याय की रीति से भी हल किया जा सकता है ।

चूंकि तीनों बल R, S, और W एक बिन्दु O' पर मिलेंगे, इसलिये धारा ७९ के साध्य से

$(a+b)$ कोस्पज्या $O'GA$=b कोस्पज्या β—a कोस्पज्या α,

अर्थात् $(a+b)$ स्पज्या θ=b कोस्पज्या β—a कोस्पज्या α,

जो समीकरण (४) ही है ।

अब लामी के प्रमेय (धारा ४०) से

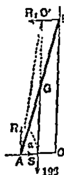
$$\frac{R}{\text{ज्या } BO'G}=\frac{S}{\text{ज्या } AO'G}=\frac{W}{\text{ज्या } AO'B},$$

अर्थात् $$\frac{R}{\text{ज्या } \beta}=\frac{S}{\text{ज्या } \alpha}=\frac{W}{\text{ज्या } (\alpha+\beta)}.$$

उदाहरण ३ । एक सीढ़ी, जिसका भार 192 पौं० और लम्बाई 25 फुट है, का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा भूमि पर; यदि उसके सबसे निचले बिन्दु पर एक खूँटी उसे फिसलने से रोकती है और यदि उस बिन्दु की दीवार से दूरी 7 फुट है, तो खूँटी, भूमि, और दीवार पर प्रतिबल मालूम करो ।

मान लो AB सीढ़ी है और G उसका मध्य-बिन्दु है, और मान लो

R और R_1 भूमि और दीवार के प्रतिबल हैं और S खूंटी का क्षैतिज प्रतिबल है। मान लो कोण $GAO = \alpha$,



$$\text{तो कोज्या } \alpha = \frac{AO}{AB} = \frac{7}{25},$$

$$\text{और इसलिये ज्या } \alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

सीढ़ी पर कार्य करते हुये बलों के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अवयव बलों को शून्य के बराबर रखने पर,

$R - 192 = 0$. (१),

और $R_1 - S = 0$ (२).

A पर घूर्ण लेने पर,

$192 \times AG$ कोज्या $\alpha = R_1 \times AB$ ज्या α .. ... (३) ;

$\therefore\ R_1 = 192 \times \frac{1}{2}$ कोस्पज्या $\alpha = 96 \times \frac{7}{24} = 28.$

अत (१) और (२) से

$R = 192$ और $S = 28.$

इसलिये इष्ट प्रतिबल क्रमसे 28, 192, और 28 पौं० भार के बराबर हैं।

पिछले अध्याय से R और S का परिणामीबल भार और R_1 की क्रिया-रेखाओं के प्रतिच्छेद-विन्दु O' से होकर जायगा।

उदाहरण ४। एक समदंड का एक सिरा किसी कब्जे से लगा हुआ है, और दूसरे सिरे से बंधी हुई एक डोरी दंड को सम्हाले हुये है; दंड और डोरी दोनों क्षैतिज से एक ही कोण θ बनाते हैं; यदि दंड का भार W है, तो सिद्ध करो कि कब्जे पर प्रतिबल $\frac{W}{4}\sqrt{8 + \text{व्युज्या}^2\,\theta}$ है।

मान लो AB दंड है, C उसका मध्य विन्दु है, और BD डोरी है जो A से होकर खींची गई क्षैतिज रेखा को D पर मिलती है।

मान लो डोरी का तनाव T है।

कब्जे पर प्रतिबल परिमाण और दिशा दोनों में अज्ञात हैं। मान

लो इस प्रतिबल के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अवयव बल X और Y हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है। AD पर BE लम्ब डालो, तो $AD=2AE=2AB$ कोज्या θ.

बलों को क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं मे विश्लिष्ट किया, तो

$$X=T \text{ कोज्या } \theta \quad . \quad (१),$$

$$Y+T \text{ ज्या } \theta=W \quad . \quad .. \quad (२).$$

A पर घूर्ण लिया, तो

$$W.AC \text{ कोज्या } \theta=T.AD \text{ ज्या } \theta=T.2AB \text{ कोज्या } \theta \text{ ज्या } \theta \quad .. \quad (३).$$

(३) से, $$T=W\frac{AC}{2AB \text{ ज्या } \theta}=\frac{W}{4 \text{ ज्या } \theta}.$$

अतः (१) और (२) से,

$$X=\frac{W}{4}\text{ कोस्पज्या } \theta, \text{ और } Y=W-\frac{W}{4}=\frac{3W}{4}.$$

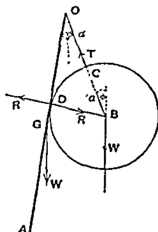
इसलिये कब्जे पर प्रतिबल $=\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{W}{4}\sqrt{9+\text{कोस्पज्या}^2\,\theta}$

$$=\frac{W}{4}\sqrt{8+\text{व्युज्या}^2\,\theta}.$$

यदि DB, W की क्रिया-रेखा को M पर मिले, तो पिछले अध्याय से A पर प्रतिबल की क्रिया-रेखा AM होगी। अतः यदि CN, AM के समानान्तर हैं तो CMN बल त्रिभुज होगा।

उदाहरण ५। एक भारी सम दंड अपने एक सिरे पर, जो नियत है, बेरोक घूम सकता है; इस सिरे पर एक डोरी बँधी हुई है जो एक गोले को जिसकी त्रिज्या a है, सम्हालें हुये है। यदि दंड की लम्बाई $4a$ है, डोरी की लम्बाई a है, और गोले और दंड दोनो में से प्रत्येक का भार W है, तो दड और डोरी के ऊर्ध्वाधर से झुकाव और डोरी का तनाव मालूम करो।

मान लो OA दंड है, OC डोरी है, B गोले का केन्द्र और D वह बिन्दु है जहाँ दंड गोले को स्पर्श करता है।



गोले और दंड के बीच D पर प्रतिबल R है जो OD पर लम्ब है, और दोनों पिंडों पर विपरीत दिशाओं में कार्य करता है।

जो बल केवल गोले पर कार्य करते हैं, वे समतुलित होंगे, और जो बल केवल दंड पर कार्य करते हैं वे भी समतुलित होंगे।

चूंकि गोले पर केवल तीन बल कार्य करते हैं इसलिये वे एक ही विन्दु अर्थात् गोले के केन्द्र पर मिलेंगे।

अतः OCB एक सीधी रेखा है।

मान लो दंड और डोरी के ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ और ϕ हैं, तो

$$\text{ज्या}\,(\theta+\phi)=\frac{DB}{OB}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \theta+\phi=30^\circ \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

जो बल दंड पर कार्य करते है, वे D पर प्रतिबल, दंड का भार और कब्जे पर प्रतिबल हैं।

यदि हम O पर घूर्ण लें तो O पर प्रतिबल छूट जायगा, और

$$W.2a\,\text{ज्या}\,\theta=R.OD=R.2a\,\text{कोज्या}\,30^\circ \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

गोले के समतुलन के नियमों से

$$\frac{T}{\text{ज्या}\,(\phi+60^\circ)}=\frac{R}{\text{ज्या}\,\phi}=\frac{W}{\text{ज्या}\,60^\circ} \quad \ldots \quad \ldots \quad (३).$$

इसलिये (२) और (३) से

$$\frac{\text{ज्या}\,\theta}{\text{कोज्या}\,30^\circ}=\frac{R}{W}=\frac{\text{ज्या}\,\phi}{\text{ज्या}\,60^\circ}.$$

$\therefore\ \phi=\theta$, अतः (१) से $\theta=\phi=15^\circ$.

(३) में रखने पर,

$$T=W\frac{\text{ज्या}\,75^\circ}{\text{ज्या}\,60^\circ}=W\,\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}=\frac{W}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})=1{\cdot}1153\times W,$$

और $$R=W\frac{\text{ज्या}\,15^\circ}{\text{ज्या}\,60^\circ}=W\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}=\frac{W}{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})={\cdot}2988\times W.$$

उदाहरणमाला १२

१। एक सम दंड AB का एक सिरा A एक चिकने क्षैतिज धरातल AC पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा B दूसरे धरातल CB पर जो

पहले धरातल से 60° का कोण बनाता है, रखा हुआ है। यदि दंड का भार W है और डोरी CA, जो CB के बराबर है दंड को फिसलने से रोकती है तो उसका तनाव मालूम करो।

२। एक सीढी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा चिकने फ़र्श पर; यदि सीढ़ी का भार W है और वह क्षैतिज से 60° का कोण बनाती है, तो गणना तथा लेखा-चित्र द्वारा सीढी के नीचे सिरे पर लगाये गये उस क्षैतिज बल को मालूम करो जो उसे फिसलने से रोकता है।

३। एक छड, जिसका भार W है अपने गुरुत्व-केन्द्र C से दो भागों AC और BC मे जिनकी लम्बाई क्रम से a और b है, बँटी हुई है। छड़ एक ऊर्ध्वाधर धरातल मे हो जाती है जबकि उसका एक सिरा चिकने फर्श AD पर और दूसरा सिरा चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार DB पर होता है। एक डोरी D पर एक कटिया से और छड के एक बिन्दु P से बँधी हुई है। यदि डोरी का तनाव T है और क्षैतिज से छड़ और डोरी के झुकाव क्रम से θ और ϕ है, तो सिद्ध करो कि

$$T = W \frac{a \text{ कोज्या } \theta}{(a+b) \text{ ज्या } (\theta - \phi)}.$$

४। एक सीढी का एक सिरा चिकने फ़र्श पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर। वह क्षैतिज से कोण α बनाती है, नीचे का सिरा एक डोरी से बँधा हुआ है और डोरी उस जगह बँधी हुई है जहाँ दीवार और फर्श मिलते हैं; डोरी का तनाव मालूम करो।

डोरी का तनाव उस समय भी मालूम करो जबकि एक आदमी, जिसका भार सीढी के भार का आधा है, सीढी पर दो-तिहाई दूर तक चढ गया है।

५। एक सम छड़ का एक सिरा एक चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा, जिससे एक डोरी बँधी हुई है, एक दूसरे चिकने धरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण α बनाता है; डोरी आनत तल के शिखर पर स्थित एक घिरनी के ऊपर होकर

ऊर्ध्वाधर अवस्था में लटकते हुये एक भार P को सम्हाले हुये हैं ; छड़ का भार W है, सिद्ध करो कि छड़ सब अवस्थाओं में समतुलित रहेगी यदि $2P = W$ ज्या α.

६। एक भारी सम छड़ के सिरे दो चिकने आनत तलों पर रखे हुये हैं जो एक क्षैतिज रेखा में मिलते हैं और जो क्षैतिज से कोण α और β बनाते हैं ; समतुलित अवस्था मे क्षैतिज से छड़ का झुकाव और तलों के प्रतिबल मालूम करो।

७। एक सम छड का एक चिकना सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार और भूमि के मिलने के स्थान पर रखा हुआ हैं। उसे एक डोरी सम्हाले हुये है जो छड़ के दूसरे सिरे और दीवार पर एक खूंटी से बँधी हुई हैं। डोरी का तनाव मालूम करो, और सिद्ध करो कि तनाव छड के भार का आधा होगा यदि डोरी की लम्बाई भूमि से खूंटी की ऊँचाई के बराबर हो।

८। एक भारी सम दंड BC जिसका भार 2 पौ० हैं, B पर बेरोक घूम सकता है ; उसे 8 इंच लम्बी एक डोरी AC सम्हाले हुये है। डोरी A बिन्दु से जो B से खींची गई क्षैतिज रेखा में है बँधी हुई है। AB की दूरी 10 इंच हैं। यदि दंड की लम्बाई 6 इंच है, तो डोरी का तनाव मालूम करो। खींच कर तथा नाप कर अपने उत्तर की जाँच करो।

९। एक सम दंड का ऊपरी सिरा एक कब्जे से लगा हुआ है और उसका दूसरा सिरा एक डोरी से बंधा हुआ है जो उसी क्षैतिज धरातल में जिसमें कब्जा है एक नियत बिन्दु से बँधी हुई है, डोरी की लम्बाई नियत बिन्दु और कब्जे के बीच की दूरी के बराबर है। यदि डोरी का तनाव दंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}\frac{1}{2}$ बनाता है, और कब्जे का प्रतिबल $\frac{W}{5}\sqrt{10}$ के बराबर है और क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}\frac{1}{3}$ बनाता है।

१०। एक दंड ऊर्ध्वाधर धरातल में सिरे पर लगे हुये एक कब्जे पर घूम सकता है और दूसरे सिरे पर दंड के भार के आधे के बराबर एक भार

बँधा हुआ है ; यह सिरा एक डोरी से सम्हाला जाता है जिसकी लम्बाई l है और जिसका दूसरा सिरा कब्जे से ऊर्ध्वाधर c ऊँचाई पर बँधा हुआ है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव $\frac{lW}{c}$ है, जहाँ पर W दंड का भार है ।

११। AB एक सम दड है जिसकी लम्बाई $8a$ है और जो अपने नियत सिरे A पर बेरोक घूम सकता है; C एक चिकना छल्ला है जिसका भार दड के भार से दुगना है, और जो दंड पर सरक सकता है और एक डोरी CD द्वारा D से बँधा हुआ है जो उसी क्षैतिज धरातल में है जिसमें A है; यदि AD और CD दोनों की लम्बाइयाँ a हैं तो छल्ले का स्थान और डोरी का तनाव मालूम करो जबकि दड समतुलित अवस्था में है ।

यह भी सिद्ध करो कि दंड के नियत विन्दु A पर प्रतिबल $\sqrt{3}W$ के बराबर एक क्षैतिज बल है जहाँ पर W दड का भार है ।

१२। एक बिना भार का दृढ तार जिसका आकार केन्द्र पर कोण a बनाता हुआ वृत्त का एक चाप है, और जिसके सिरों पर दो भार P और Q लटके हुये हैं, एक क्षैतिज धरातल पर टिका हुआ है जबकि तारका उन्नतोदरत्व नीचे की ओर है; यदि उस सिरे पर खींची गई त्रिज्या जिस पर भार P लटका हुआ है ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाती है तो सिद्ध करो कि

$$\text{स्पज्या}\ \theta = \frac{Q\ \text{ज्या}\ a}{P+Q\ \text{कोज्या}\ a}.$$

१३। एक चिकने अर्द्ध गोलीय प्याले का एक सिरा एक चिकनी उर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है ; प्याले का व्यास a है ; एक भारी सम दंड क्षैतिज से $60°$ का कोण बनाता हुआ समतुलित अवस्था में रहता है यदि उसका एक सिरा प्याले के भीतरी पृष्ठ पर और दूसरा दीवार पर हो ; सिद्ध करो कि दंड की लम्बाई $a + \frac{a}{\sqrt{13}}$ है ।

१४। एक बेलनाकार वर्तन, जिसकी ऊंचाई 4 इंच और व्यास 3 इंच है, एक क्षैतिज तल पर खड़ा है, और एक 9 इंच लम्बा सम दंड उसके भीतर

उसके किनारे से टिका हुआ रखा हुआ है। दंड और बर्तन के बीच का प्रतिबल मालूम करो, दड का भार 6 औंस है।

१५। एक पतला छल्ला जिसकी त्रिज्या R है और भार W है, एक ऊर्ध्वाधर बेलन के चारों ओर रखा है और उसे गिरने से एक कील रोके हुये है जो बेलन से बाहर आड़ी निकली हुई है। बेलन और छल्ले के बीच के प्रतिबल मालूम करो।

१६। एक भारी गाड़ी के पहिये को, जिसका भार W है और जिसकी त्रिज्या r है, केन्द्र पर एक क्षैतिज बल F लगा कर एक खूंटे के ऊपर होकर खींचना है; यदि खूंटे की ऊँचाई h है तो सिद्ध करो कि F, $W\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ से अधिक होगा।

१७। एक सम छड जिसकी लम्बाई $2a$ है, समतुलित अवस्था में है जबकि उसका एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका हुआ है और उसकी लम्बाई का कोई बिन्दु एक चिकने क्षैतिज दड पर रखा हुआ है। दंड दीवार के समानान्तर और दीवार से b की दूरी पर है। सिद्ध करो कि छड़ का झुकाव ऊर्ध्वाधर से ज्या$^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ है।

१८। एक वृत्ताकार मंडल BCD, जिसकी त्रिज्या a और भार W है, एक हल्के और बारीक फीते से सधा हुआ है; फ़ीता मंडल को चाप BCD के किनारे किनारे घेरे हुये है और उसके सिरे ऊर्ध्वाधर दीवार के बिन्दु A पर बँधे हुये हैं, उसका भाग $A\,D$ दीवार का स्पर्श करता है और मंडल का धरातल दीवार पर लम्ब है। यदि फ़ीते के उस भाग की लम्बाई जो मंडल को स्पर्श नहीं करती है $2b$ हो, तो सिद्ध करो कि फीते का तनाव $\frac{W}{2}\,\frac{a^2+b^2}{b^2}$ है, और D पर प्रतिबल मालूम करो।

१९। दो बराबर सम भारी सीधे दंड एक सिरे पर एक डोरी से जुड़े हुये हैं और वे एक ही क्षैतिज रेखा में दो चिकनी खूंटियों पर रखे हुये हैं,

एक दंड एक खूँटी पर है और दूसरा दूसरी पर ; यदि खूँटियों के बीच की दूरी प्रत्येक दंड की लम्बाई के बराबर हो और डोरी की लम्बाई इसकी आधी हो, तो सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण θ बनाते हैं जो 2 कोज्या$^3 \theta = 1$ द्वारा दिया जाता है ।

२०। एक सम दंड, जिसका भार W है, दो बारीक डोरियों से सम्हला हुआ है। डोरियों के एक एक सिरे दंड के सिरों से बँधे हुये हैं और वे नियत चिकनी घिरनियों के ऊपर होकर जाती है और उनके दूसरे सिरों पर क्रमशः w_1 और w_2 भार लटके हुये हैं। सिद्ध करो कि दंड क्षैतिज से कोण

$$\text{ज्या}^{-1} \frac{w_1^2 - w_2^2}{W\sqrt{2(w_1^2 + w_2^2) - W^2}},$$

बनाता है ।

२१। एक सम दंड, जिसका भार W है, $2l$ लम्बी एक डोरी से जो उसके सिरों से एक चिकनी खूँटी के ऊपर होकर गुजरती हुई बँधी हुई है, समतुलित अवस्था में सधा हुआ है। यदि अब एक भार W' दंड के एक सिरे पर लगा दिया जाय तो सिद्ध करो कि खूँटी के ऊपर से डोरी को $\frac{lW'}{W+W'}$ लम्बाई सरका कर दंड एक दूसरे समतुलित अवस्था में रखा जा सकता है।

२२। AB एक सीधा दंड है, जिसकी लम्बाई $2a$ और भार λW है, और उसका नीचे का सिरा A भूमि पर ऊर्ध्वाधर दीवार AC के आधार पर रखा हुआ है ; B और C, A के ऊपर एक ही ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $2b$ पर है ; एक भारी छल्ला जिसका भार W है, $2l$ लम्बी डोरी पर जो B और C को मिलाती है, बेरोक सरक सकता है। यदि समुदाय समतुलित है जबकि छल्ला डोरी के मध्य-विन्दु पर है, तो सिद्ध करो कि

$$l^2 = a^2 - b^2\frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}.$$

२३। एक वर्गाकार तख्ता जिसकी भुजा b है, क्षैतिज अवस्था में $OACO$ और $OBDO$ डोरियों के दो दिये हुये पाशों से सधा हुआ है जो सम्मुख के कोनों के नीचे से गुजरते हुये एक नियत कटिया O से लटके हुये हैं; डोरियों के तनाव मालूम करो जबकि तख्ते के ऊपर O की ऊँचाई b है।

२४। 100 पौ० भार का एक फाटक दो कब्जों पर लगा हुआ है, कब्जे फाटक के गुरुत्व-केन्द्र से 4 फुट दूरी पर एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा में एक दूसरे से 3 फुट दूर हैं। यदि फाटक का सारा भार नीचे के कब्जे पर पड़ता है तो प्रत्येक कब्जे के प्रतिबल का प्ररिमाण मालूम करो।

२५। तीन दंडों से बना हुआ एक त्रिभुज क्षैतिज अवस्था मे नियत है और एक सम गोला उसपर रखा हुआ है; सिद्ध करो कि दंडों के प्रतिबल उनकी लम्बाइयों के अनुपात मे हैं।

२६। एक हल्का त्रिभुजीय ढाँचा ऊर्ध्वाधर धरातल में C को सबसे ऊपर किये हुये एक ही क्षैतिज रेखा मे A और B दो आलम्बनों पर खड़ा है और C से 18 पौं० का भार लटका हुआ है। यदि $AB=AC=18$ फुट और $BC=5$ फुट, आलम्बनो पर प्रतिबल मालूम करो।

२७। एक त्रिभुजीय ढाँचे की भुजायें 13, 20, और 21 इंच लम्बी है; सबसे बड़ी भुजा एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखी हुई है और सम्मुख के कोण से 63 पौ० का एक भार लटका हुआ है। मेज पर रखी हुई भुजा पर तनाव मालूम करो। खींच कर और नाप कर अपने उत्तर की जाँच करो।

२८। एक प्याला, जो a त्रिज्या के एक खोखले गोले से बना है, इस प्रकार रखा हुआ है कि गोले की त्रिज्यायें जो उसके किनारे के प्रत्येक बिन्दु से खींची गई है ऊर्ध्वाधर से कोण α बनाती हैं; और वह त्रिज्या जो प्याले के एक बिन्दु A से खींची गई है ऊर्ध्वाधर से कोण β बनाती है। यदि एक चिकना सम दंड इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका

एक सिरा A पर है और उसकी लम्बाई का एक विन्दु किनारे को छूता है, तो सिद्ध करो कि दंड की लम्बाई

$$4a \text{ ज्या } \beta \text{ व्युकोज्या } \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ है ।}$$

८६—अगली धाराओं में समतुलन के वे नियम, जिनका वर्णन धारा ८३ में किया गया है, भिन्न प्रकार से मालूम किये गये हैं ।

८७—साध्य । यदि एक धरातल में बलों का कोई समुदाय किसी पिंड पर कार्य करे, तो वह समुदाय पिंड के किसी अनियत बिन्दु पर कार्य करते हुये एक बल और एक बलयुग्म के बराबर होता है ।

मान लो P समुदाय का कोई एक बल है जो पिंड के किसी विन्दु A पर कार्य करता है, और मान लो O कोई अनियत विन्दु है । O पर दो बराबर और विपरीत बल, जिनमें से प्रत्येक का परिमाण P है, लगाओ और मान लो उनकी क्रिया-रेखायें P की प्रयोग रेखा के समानान्तर हैं । यह बल पिंड की समतुलित अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं करते ।

A पर कार्य करता हुआ बल P और O पर कार्य करता हुआ समानान्तर विपरीत बल P एक बलयुग्म बनाते हैं जिसका घूर्ण $P.p$ है, जहाँ पर p, O से मौलिक बल P की क्रिया-रेखा पर डाला गया

अत: A पर कार्य करता हुआ बल P, O पर कार्य करते हुये समानान्तर बल P और एक बलयुग्म जिसका घूर्ण $P.p$ है, के बराबर हैं।

इसी प्रकार B पर कार्य करता हुआ बल Q, O पर कार्य करते हुयें समानान्तर बल Q और एक बलयुग्म जिसका घूर्ण $Q.q$ है, के बराबर है, जहां पर q, O से Q की क्रिया-रेखा पर डाला हुआ लम्ब है।

यही बात समुदाय के प्रत्येक बल के लिये सही है।

अत: बलों का मौलिक समुदाय O पर कार्य करते हुये बल P, Q, R...जो मौलिक दिशाओं के समानान्तर हैं, और कुछ बलयुग्मों के बराबर है, और यह O पर कार्य करते हुये एक मात्र परिणामीबल तथा एक बलयुग्म जिसका घूर्ण $P.p+Q.q+\cdots$ है, के बराबर है।

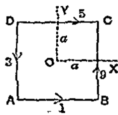
८८*—धारा ७४ के अनुसार एक बल और एक बलयुग्म समतुलित नहीं हो सकते जबतक कि उनमें से प्रत्येक शून्य न हो।

अत. O पर कार्य करते हुये बल $P, Q, R,$....का परिणामीबल शून्य होगा और इसलिये धारा ४६ से उनके विश्लिष्ट भागों का योग दो दिशाओं के ऊपर पृथक् पृथक् शून्य होगा।

घूर्ण $Pp,+Qq+\ldots$ भी शून्य होगा अर्थात् किसी अनियत बिन्दु O पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग भी शून्य होगा।

८९*—उदाहरण। $ABCD$ एक वर्ग है; भुजाओं AB, BC, DC और DA के ऊपर 1,9,5, और 3 पौं० भार के बल कार्य करते है; वर्ग के केन्द्र से होकर गुजरता हुआ बल और वह बलयुग्म मालूम करो जो दिये हुये समुदाय के बराबर हो।

मान लो O वर्ग का केन्द्र है और OX और OY क्रम से भुजाओं BC और CD पर लम्ब हैं। मान लो वर्ग की भुजा $2a$ है।



बल $9, OY$ पर कार्य करते हुये बल 9 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण $9.a$ है।

बल $3, OY$ पर कार्य करते हुये बल -3 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण $3.a$ है।

बल 5, OX पर कार्य करते हुये बल 5 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण $-5.a$ है ।

बल 1, OX पर कार्य करते हुये बल 1 और उस बलयुग्म के बराबर है जिसका घूर्ण $1.a$ है ।

अतः परिणामी बलयुग्म का घूर्ण $9a+3a-5a+1.a$ अर्थात् $8.a$ है ।

OX पर अवयव बल 6 है और OY पर अवयव बल 6 है ।

अतः परिणामीबल $6\sqrt{2}$ पौ० भार के बराबर है जो भुजा AB से 45° का कोण बनाता है ।

उदाहरणमाला १३

१। एक वर्ग पर 2, 4, 6, और 8 पौ० भार के बल उसकी भुजाओं पर क्रमानुसार कार्य करते हैं ; इन बलों का परिणामीबल और परिणामी-बलयुग्म मालूम करो जबकि परिणामीबल वर्ग के केन्द्र मे होकर जाता है।

२। $ABCD$ एक वर्ग है , $DA, AB, BC, CD,$ और DB पर बल $P, 3P, 5P, 7P,$ और $9\sqrt{2}P$ कार्य करते हैं , A से होकर गुजरता हुआ बल और बलयुग्म मालूम करो जो मिलकर समुदाय के बराबर हों ।

३। 1, 2, 3, 4, 5, और 6 पौ० भार के बल एक सम षट्भुज की भुजाओं AB, BC, CD, DE, EF और FA पर क्रम से कार्य करते हैं , A से होकर गुजरता हुआ बल और बलयुग्म मालूम करो जो मिलकर समुदाय के बराबर हों ।

४। यदि 10 पौं० भार के एक बल का स्थान दिया हो और दो बलों के एक बलयुग्म, जिसमें से प्रत्येक बल 4 पौं० भार के बराबर है और एक दूसरे से 2 इंच की दूरी पर है, का स्थान भी दिया गया हो, तो उनके बराबर एक मात्र बल को खींचो ।

नियंत्रित पिंड

९०—कोई पिंड नियंत्रित कहलाता है जबकि उसके एक अथवा अधिक बिन्दु नियत हों । जैसे, उस दंड का, जो दीवार से आधार प्रोद्ध

(बाल-साकेट) द्वारा लगा हुआ हैं, एक बिन्दु नियत होता हैं और इसलिये वह नियंत्रित कहलाता हैं ।

यदि किसी दृढ पिंड के दो बिन्दु A और B नियत हों, तो AB रेखा मे पिंड के सारे बिन्दु नियत होंगे और पिंड केवल AB को अक्ष मान कर उसके चारों ओर घूम सकता है । जैसे कोई दरवाज़ा जो दो कब्ज़ों मे लगा हुआ हो केवल कब्ज़ों को मिलाने वाली रेखा के ही चारों ओर घूम सकता हैं ।

यदि किसी पिंड के तीन बिन्दु नियत हों और यह तीनों बिन्दु एक सीधी रेखा में न हों तो पिंड स्पष्टत. अचल रहता है ।

जिन स्थितियों पर हम विचार करेंगे वे यह हैं (१) जबकि पिंड का एक बिन्दु नियत है और उस बिन्दु मे होकर गुज़रते हुये धरातल में बलों का एक समुदाय उसपर कार्य करता हो, और (२) जबकि पिंड केवल अपने किसी नियत अक्ष के चारों ओर ही घूम सकता हो और उसपर बलों का वह समुदाय कार्य करता हो जिनकी दिशायें अक्ष पर लम्ब हों ।

९१—जब किसी दृढ पिंड का एक बिन्दु नियत हो और उस बिन्दु से होकर गुज़रते हुये धरातल मे बलों का कोई समुदाय उस पर कार्य करे, तो वह समतुलित होगा यदि बलों के घूर्णों का बीजीय योग नियत बिन्दु पर शून्य हो ।

जब किसी पिंड का एक बिन्दु A नियत हो (जैसा कि धारा ८५ के उदाहरण ४ में हैं), तो उस बिन्दु पर कोई नियंत्रित बल F कार्य करेगा, जो दिये हुये बलों के समुदाय के साथ समतुलित होगा । अतः धारा ८३ के समतुलन के नियम प्रयोग में आयेंगे ।

यदि हम दो लम्ब दिशाओं में बलों को विश्लिष्ट करें तो हमें F के परिमाण और दिशा मालूम करने के लिये दो समीकरण मालूम हो जायेंगे ।

यदि हम सब बलों के घूर्ण A पर लें, तो बल F (चूंकि वह A से होकर जाता है) हमारे समीकरण में नहीं आता, अतः धारा ८३ के घूर्णों का समीकरण एक ऐसा समीकरण हो जायगा जो इस बात को बतलायेगा कि A पर दिये हुये बलों के समुदाय के घूर्णों का बीजीय योग शून्य हैं ।

अतः पिंड के समतुलन के लिये (जबतक कि हम नियंत्रित बल F न निकालना चाहें) हमें केवल इतना ही व्यक्त करना हैं कि नियत विन्दु A पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य हैं।

९२—उदाहरण। दंड AB का एक सिरा नियत है, और वह चैतिज अवस्था में 10 पौं० भार के एक बल से जो कि दंड से $30°$ का कोण बनाता है समतुलित अवस्था में रखा हुआ है; यदि दंड सर्वत्र सम है और उसकी लम्बाई 4 फुट है, तो उसका भार मालूम करो।

A पर भार का घूर्ण A पर बल के घूर्ण के बराबर होगा।

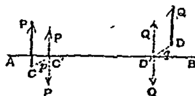
यदि W भार है, तो पहला घूर्ण $W \times 2$ है और दूसरा 10×4 ज्या $30°$ है।

$$\therefore 2W = 10 \times 4 \text{ ज्या } 30° = 20.$$

$$\therefore W = 10 \text{ पौं० भार।}$$

९३—जब किसी दृढ़ पिंड का एक अक्ष नियत हो, और उस पर कुछ ऐसे बल कार्य कर रहे हों जिनकी दिशायें इस अक्ष पर लम्ब हों, तो वह समतुलित अवस्था में होगा यदि नियत अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

[यदि कोई बल दिये हुये अक्ष पर लम्ब हो और उससे न मिलता हो तो अक्ष पर उसका घूर्ण, बल तथा अक्ष और बल के बीच की लम्ब दूरी का गुणनफल होता है।]



मान लो AB पिंड में नियत अक्ष है, और मान लो पिंड पर बल $P, Q, \ldots$ कार्य करते हैं; यह आवश्यक है कि यह बल समानान्तर हों परन्तु उनकी दिशायें अक्ष पर लम्ब होनी चाहियें।

अक्ष और P दोनों पर CC' लम्ब खींचो, और अक्ष और Q पर DD' लम्ब खींचो ; मान लो इनकी लम्बाइयाँ क्रमशः p और q हैं।

C' पर दो बराबर और विपरीत बल लगाओ जिनमें से प्रत्येक P के बराबर हो और इनमें से एक मौलिक बल P के समानान्तर हो ।

C पर कार्य करता हुआ बल P और C' पर कार्य करते हुये दो बल (P, P) एक बल P के जो मौलिक बल P के समानान्तर है, और एक बलयुग्म के जिसका घूर्ण $P.p$ है, बराबर हैं ।

इसी प्रकार D पर कार्य करता हुआ बल Q, D' पर कार्य करते हुये एक बल Q के और एक बलयुग्म के जिसका घूर्ण $Q.q$ है, बराबर हैं ।

इसी प्रकार से और बलों के लिये भी दिखलाया जा सकता है ।

बलों का पिंड को अक्ष के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं होता क्योंकि यह अक्ष को काटते हैं, और यह अक्ष पर कार्य करते हुये नियंत्रित बलों से समतुलित हो जाते हैं ।

धारा ७२ और ७३ से ये बलयुग्म उस एक बलयुग्म के बराबर हैं जिसका घूर्ण $P.p+Q.q+$ ....हैं और जो अक्ष के धरातल के लम्ब धरातल में पड़ते हैं।

अतः पिंड समतुलित होगा यदि $P.p+Q.q+$....शून्य हों और यह अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग हैं ।

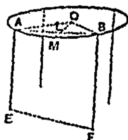
अतः साध्य सही है ।

९४—उदाहरण । एक वृत्ताकार सम मेज़, जिसका भार 80 पौ० है चार बराबर बराबर पायों पर खड़ी है जो उसके किनारों पर सममित रूप से लगे हुये है ; वह कम से कम भार मालूम करो जो यदि मेज के किनारे से लटकाया जाय तो मेज को ठीक उलट दे ।

मान लो AE और BF मेज के, जिसका केन्द्र O है, दो पाये हैं ; मेज का भार O पर कार्य करेगा ।

यदि भार मेज के उस भाग से जो A और B के बीच में है, लटकाया जाय तो मेज यदि वह तनिक भी उलटेगी तो वह बिन्दु E और F को

मिलाने वाली रेखा पर ही उल्टेगी। और वह ठीक उलटने पर होगी जबकि भार और मेज के भार के घूर्ण EF पर बराबर हों।



भार का सबसे अधिक प्रभाव तब होगा जब वह चाप AB के मध्य-बिन्दु M पर रक्खा जाय।

मान लो OM, AB को L पर मिलती है, और x इष्ट भार है। यदि EF पर घूर्ण लिया जाय तो AB पर घूर्ण लेनेवाला समीकरण आयेगा।

$$\therefore \quad x.LM = 80.OL.$$

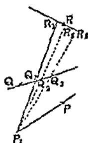
परन्तु $LM = OM - OL = OA - OA$ कोज्या $45° = OA\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\therefore \quad x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) OA = 80.OL = 80.\frac{1}{\sqrt{2}}.OA,$$

$$\therefore \quad x = \frac{80}{\sqrt{2}-1} = 80(\sqrt{2}+1) = 193 \cdot 1 \text{ पौं॰ भार।}$$

९५।—साध्य। यदि किसी पिंड पर कार्य करते हुये तीन बल पिंड को समतुलित रक्खें, तो वे एक ही धरातल में होंगे।

मान लो तीन बल P, Q, और R हैं।



मान लो P और Q की क्रिया-रेखा पर P_1 और Q_1 कोई दो बिन्दु हैं।

चूंकि बल समतुलित हैं अत: उनका पिंड को $P_1 Q_1$ रेखा के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं हो सकता है। परन्तु बल P और Q इस रेखा को मिलते हैं और इसलिये इनका पिंड को $P_1 Q_1$ के चारों ओर घुमाने में पृथक पृथक कोई प्रभाव नहीं हो सकता है। अतः तीसरे बल R का भी पिंड को $P_1 Q_1$ के चारों ओर घुमाने में कोई प्रभाव नहीं होगा।

अतः $P_1 Q_1$ रेखा R को अवश्य मिलेगी।

इसी प्रकार, यदि $Q_2, Q_3 \ldots, Q$ की क्रिया-रेखा पर और विन्दु हों, तो $P_1 Q_2$, $P_1 Q_3, \ldots$ रेखायें R को अवश्य मिलेंगी।

अतः R, P_1 से जाते हुये धरातल में होगा और Q की क्रिया-रेखा अर्थात् Q और R की क्रिया-रेखायें उस धरातल में होंगी जो P_1 से जाता है।

परन्तु P_1, P की क्रिया-रेखा पर कोई विन्दु है; और इसलिये यह धरातल P की क्रिया-रेखा पर किसी भी विन्दु से होकर गुजरेगा अर्थात् उस धरातल पर P की क्रिया-रेखा पड़ेगी।

उपसाध्य। धारा ७७ से यह भी परिणाम निकलता है कि तीनों बल एक विन्दु पर मिलेंगे अथवा समानान्तर होंगे।

उदाहरणमाला १४

१। एक वर्गाकार सम प्लेट एक शीर्ष से लटका हुआ है, और प्लेट के भार के आधे भार के बराबर एक भार वर्ग के संलग्न शीर्ष में लटका हुआ है। प्लेट की समतुलित अवस्था मालूम करो।

२। एक खोखला ऊर्ध्वाधर बेलन, जिसकी त्रिज्या $2a$ और ऊँचाई $3a$ है, एक क्षैतिज मेज़ पर रखा हुआ है, और एक सम दंड उसके भीतर इस प्रकार रखा है कि उसका नीचे का सिरा बेलन के आधार की परिधि पर है; यदि दंड का भार बेलन के भार के बराबर है, तो बताओ दंड कितना लम्बा हो कि वह बेलन को ठीक उलट सके।

३। एक बेलन, जिसकी लम्बाई b है और जिसके आधार का व्यास c है, ऊपर से खुला हुआ है और एक क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है; एक सम दंड बेलन के भीतर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका कुछ भाग उसके नीचे और ऊपर के किनारों को छूता है; यदि बेलन का भार दंड के भार का n गुना है, तो दंड की लम्बाई मालूम करो जबकि बेलन ठीक उलटने की अवस्था में हो।

४। एक वर्गाकार मेज़ चार पायों पर खड़ी है जो उसकी भुजाओं के मध्य-विन्दुओं पर हैं ; वह महत्तम भार मालूम करो जो मेज़ को बिना उल्टे हुये उसके एक कोने पर रखा जा सके।

५। एक गोल मेज़ लगे हुये बराबर दूरी पर किनारे पर तीन हल्के पायों पर खड़ी है, और जब एक आदमी एक पाये के सम्मुख किनारे पर बैठता है, तो मेज़ ठीक उलट जाती है और अपने किनारे पर दो पायों के बल गिर पड़ती है। फिर वह मेज़ के सबसे ऊँचे विन्दु पर बैठता है और मेज़ को फिर उलट देता है। सिद्ध करो कि मेज़ की त्रिज्या एक पाये की लम्बाई की $\sqrt{2}$ गुनी है।

६। एक वृत्ताकार मेज़ के, जिसका भार 10 पौ० है, तीन ऊर्ध्वाधर पाये हैं जो बराबर बराबर दूरी पर उसकी परिधि के तीन विन्दुओं पर लगे हुये हैं ; वह कम से कम भार मालूम करो जो यदि मेज़ के किनारे के किसी विन्दु से लटकाया जाय तो मेज़ ठीक उलट जाय।

७। एक चार पाये की वर्गाकार मेज़ का एक पाया नहीं है ; बताओ मेज़ के भार के बराबर मेज़ पर किस जगह एक भार रखा जाय कि मेज़ के शेष तीन पायों पर दबाव बराबर बराबर हो ?

८। एक वर्गाकार मेज़, जिसका भार 20 पौं० है, के पाये उसकी भुजाओं के मध्य-विन्दुओं पर हैं ; और तीन बराबर बराबर भार जिनमें से प्रत्येक मेज़ के भार के बराबर है उसके तीन शीर्षों पर रक्खे हुये हैं। बताओ कौन सा महत्तम भार उसके चौथे शीर्ष पर रखा जाय कि मेज़ समतुलित अवस्था में रहे ?

९। सम मोटाई का एक वृत्ताकार धातु का प्लेट, जिसका भार w है, परिधि के किसी एक बिन्दु से लटका हुआ है। उसके किनारे से लिपटी हुई एक डोरी भार p थामे हुये है। वह कोण मालूम करो जो लटकानेवाले बिन्दु से खींचा हुआ व्यास ऊर्ध्वाधर से बनाता है।

१०। एक सम वृत्ताकार मंडल, जिसका भार $n\,W$ है, के किनारे के एक विन्दु पर W भार का एक कण लगा हुआ है। यदि किनारे के

किसी बिन्दु A से मंडल लटकाया जाता है तो B उसका सबसे नीचा बिन्दु होता है, और जब वह B से लटकाया जाता है तो A उसका सबसे नीचा बिन्दु होता है। सिद्ध करो कि AB द्वारा मंडल के केन्द्र पर बना हुआ कोण 2 व्युकोज्या$^{-1}$2 $(n+1)$ होगा।

११। एक भारी क्षैतिज वृत्ताकार छल्ला परिधि के बिन्दु $A, B,$ और C पर लगे हुये तीन आलम्बनों पर रखा हुआ है। यदि छल्ले का भार और त्रिभुज ABC की भुजायें और कोण दिये हों, तो आलम्बनों पर प्रतिबल मालूम करो।

अध्याय ६

गुरुत्व-केन्द्र

(Centre of Gravity)

९६—द्रव्य का प्रत्येक कण पृथ्वी के केन्द्र की ओर आकर्षित होता है, और हम गति विज्ञान में देखेंगे कि वह बल जिससे पृथ्वी किसी कण को अपनी ओर आकर्षित करती है कण की मात्रा का अनुपाती होता है।

किसी भी पिंड को कणों का स्तूप मान सकते हैं।

यदि कोई पिंड पृथ्वी की तुलना में छोटा हो, तो उसके अवयव कणों को पृथ्वी के केन्द्र से मिलाने वाली रेखायें लगभग समानान्तर होंगी, और इस पुस्तक में हम उन्हें पूर्ण रूप से समानान्तर मानेंगे।

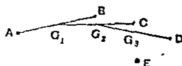
इसलिये किसी दृढ पिंड के प्रत्येक कण पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर एक बल कार्य करता है जिसे हम उसका भार कहते हैं।

यह सभी बल, समानान्तर बलों के संयोजन करने की रीति धारा ५२ से, एक मात्र बल में संयोजित किये जा सकते हैं, जो कणों के भारों के योग के बराबर होता है और पिंड के किसी नियत बिन्दु पर कार्य करता है। इस नियत बिन्दु को पिंड का गुरुत्व-केन्द्र कहते हैं।

गुरुत्व-केन्द्र। परिभाषा। किसी पिंड अथवा दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध कणों के समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र वह बिन्दु है जिससे होकर पिंड के भार की क्रिया रेखा हमेशा जाती है चाहे पिंड किसी भी स्थिति में क्यों न हो।

९७—प्रत्येक पिंड अथवा दृढ़ता पूर्वक सम्बद्ध कणों के समुदाय का एक गुरुत्व-केन्द्र होता है।

मान लो $A, B, C, D, ..$कणों का एक समुदाय है जिनका भार $w_1, w_2, w_3, ...$ हैं।



A, B को मिला दो और G_1 पर इस प्रकार विभाजित करो कि $AG_1 : G_1B :: w_2 : w_1$.

अब A और B पर कार्य करते हुये समानान्तर बल w_1 और w_2, धारा ५२ से, G_1 पर कार्य करते हुये एक बल (w_1+w_2) के बराबर हैं।

G_1C को मिला दो और उसे G_2 पर इस प्रकार विभाजित करो कि

$$G_1G_2 : G_2C :: w_3 : w_1+w_2.$$

अब G_1 और C पर कार्य करते हुये समानान्तर बल (w_1+w_2) और w_3 G_2 पर कार्य करते हुये बल $(w_1+w_2+w_3)$ के बराबर हैं।

अतः w_1, w_2, और w_3 बलों को, उनके प्रभाव को बिना बदले हुये, G_2 पर कार्य करते हुये मान सकते हैं।

इसी प्रकार G_2D को G_3 पर इस प्रकार विभाजित करो कि

$$G_2G_3 : G_3D :: w_4 : w_1+w_2+w_3.$$

हम देखते हैं कि $A, B, C,$ और D पर कार्य करते हुये चार बलों का परिणामीबल G_3 पर कार्य करते हुये ऊर्ध्वाधरबल $w_1+w_2+w_3+w_4$ के बराबर हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी पिंड के कणों के भारों को उनके प्रभाव को बिना बदले हुये पिंड के किसी बिन्दु पर कार्य करते हुये मान सकते हैं।

९८—चूंकि समानान्तर बलों के परिणामीबल के स्थान की रचना केवल प्रयोग-बिन्दु और परिमाण पर निर्भर है, न कि बलों की दिशाओं पर, इसलिये जो बिन्दु हमें अन्त में मिलता है वह वही रहेगा चाहे पिंड किसी भी

कोण पर क्यों न घुमा दिया जाय ; क्योंकि पिंड के भागों के भार फिर भी समानान्तर रहेंगे चाहे दोनों स्थितियों में पिंड के सापेक्ष उनकी दिशायें वेही न रहें ।

इसलिये हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि किसी पिंड का केवल एक ही गुरुत्व-केन्द्र होता है । क्योंकि यदि सम्भव हो तो मान लो उसके दो गुरुत्व-केन्द्र G और G_1 हैं । अब यदि, आवश्यक हो तो, पिंड को इस प्रकार घुमाओ कि GG_1 क्षैतिज हो जाय । अब G और G_1 पर कार्य करते हुये ऊर्ध्वाधर बलों का परिणामीबल, चूँकि वह स्वयं अवश्य ही ऊर्ध्वाधर रहेगा, क्षैतिज रेखा GG_1 में कार्य नहीं कर सकता ।

अत. पिंड का केवल एक ही गुरुत्व-केन्द्र हो सकता है ।

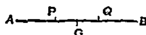
९९—यदि पिंड इतना छोटा न हो कि उसके अवयव भागों के सब भार लगभग समानान्तर समझे जा सकें, तो यह आवश्यक नहीं है कि उसका गुरुत्व केन्द्र हो ।

परन्तु प्रत्येक स्थिति में पिंड के उस बिन्दु के जो हमें धारा ९७ की रचना द्वारा प्राप्त होता है, बहुत आवश्यक गुण होते हैं और वह बिन्दु पिंड का जाडच-केन्द्र अथवा जड़त्व-केन्द्र कहलाता है । यदि पिंड का घनत्व सम है तो उसका जाडच-केन्द्र उसके केन्द्र व पर ही पड़ता है ।

१००—अब हम कुछ सरल रूप के पिंडों के गुरुत्व-केन्द्र निकालेंगे ।

(क) सम दंड ।

मान लो AB एक सम दंड है और G उसका मध्य-बिन्दु है ।



G और A के बीच में दंड का कोई बिन्दु P और G और B के बीच में एक अन्य बिन्दु Q इस प्रकार लो कि

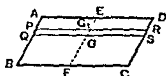
$$GQ=GP.$$

P और Q के बराबर कणों का गुरुत्व-केन्द्र G है ; और G और A के बीच के प्रत्येक कण के लिये G और B के बीच में G से बराबर दूरी पर एक दूसरा बराबर कण होगा ।

कणों के ऐसे प्रत्येक जोड़ों का गुरुत्व-केन्द्र G पर है ; इसलिये पूर्ण दंड का गुरुत्व-केन्द्र G पर होगा ।

१०१—(ख) सम समानान्तर चतुर्भुज ।

मान लो $ABCD$ एक समानान्तर चतुर्भुज है, और मान लो E और F, AD और BC के मध्य-विन्दु हैं ।



समानान्तर चतुर्भुज को बहुत से लम्बे संकीर्ण खंडों में, AD के समानान्तर रेखाओं द्वारा, जिनमें से PR और QS कोई क्रमागत जोड़ा है, विभाजित करो । अब $PQSR$ को एक सम सरल रेखा मान सकते हैं जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके मध्य विन्दु G_1 पर है ।

इस प्रकार सब संकीर्ण खण्डों का गुरुत्व-केन्द्र EF पर होगा, अतः पूर्ण चित्र का गुरुत्व-केन्द्र EF पर होगा ।

इसी प्रकार समानान्तर चतुर्भुज को AB के समानान्तर रेखाओं में विभाजित करके, हम देखेंगे कि गुरुत्व-केन्द्र AB और CD भुजाओं के मध्य-विन्दुओं के मिलाने वाली रेखा पर होगा ।

अतः गुरुत्व-केन्द्र इन दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेद-विन्दु G पर होगा ।

G समानान्तर चतुर्भुज के विकर्णों का प्रतिच्छेद-विन्दु भी है ।

१०२—पिछली दो धाराओं से यह स्पष्ट है कि यदि किसी सम पिंड में हम एक ऐसा विन्दु G मालूम कर सकें कि पिंड उस विन्दु पर समतुलित होते हुये कणों के जोड़ों में विभाजित किया जा सके, तो G पिंड का गुरुत्व-केन्द्र होगा ।

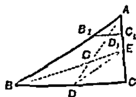
इसलिये किसी सम वृत्त अथवा सम गोले का गुरुत्व-केन्द्र उसका केन्द्र है ।

यह भी स्पष्ट है कि यदि हम किसी पटल को ऐसे लम्बे संकीर्ण खण्डों में विभाजित कर सकें जिन सबका गुरूत्व-केन्द्र एक सरल रेखा पर हो तो पटल का गुरूत्व-केन्द्र भी उसी सरल रेखा पर होगा।

इसी प्रकार यदि कोई पिंड कुछ ऐसे भागों में विभाजित किया जा सके कि उन सबके गुरूत्व-केन्द्र एक ही धरातल में हों, तो पूर्ण पिंड का गुरूत्व-केन्द्र भी उसी धरातल में होगा।

१०३—(ग) सम त्रिभुजीय पटल।

मान लो ABC त्रिभुजीय पटल है और मान लो BC और CA भुजाओं के मध्य-बिन्दु D और E हैं। AD और BE को मिला दो, और मान लो वे G पर मिलते हैं, तो G त्रिभुज का गुरूत्व-केन्द्र होगा।



मान लो B_1C_1, BC के समानान्तर कोई रेखा है जो AD को D_1 पर मिलती है।

समानान्तर चतुर्भुज की ही भांति कोई त्रिभुज भी बहुत से संकीर्ण खंडों से जैसे B_1C_1, जो सब आधार BC के समानान्तर हैं, बना हुआ माना जा सकता है।

चूंकि B_1C_1 और BC समानान्तर हैं इसलिये AB_1D_1 और ABD समरूप त्रिभुज हैं, और AD_1C_1 और ADC भी समरूप त्रिभुज हैं।

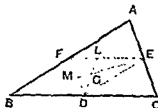
अत.
$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{AD_1}{AD}=\frac{D_1C_1}{DC}.$$

किन्तु $BD=DC$; इसलिये $B_1D_1=D_1C_1$ अतः संकीर्ण खण्ड B_1C_1 का गुरूत्व-केन्द्र AD पर होगा।

इसी प्रकार सब संकीर्ण खण्डों के गुरुत्व-केन्द्र AD पर होंगे, अतः त्रिभुज का गुरूत्व-केन्द्र AD पर होगा।

BE को मिला दो और मान लो वह AD को G पर मिलता है।

इसलिये AB और AC दंडों का गुरुत्व-केन्द्र EF पर इस प्रकार का विन्दु है कि



$EL : LF :: F$ पर भार : E पर भार
$:: AB : AC$
$:: DE . DF$

इसलिये ज्यामिति से, DL कोण FDE को समविभाजित करता है।

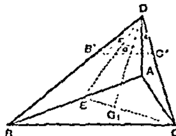
अत: तीनों दडों का गुरुत्व केन्द्र DL पर होगा।

इसी प्रकार गुरूत्व-केन्द्र EM पर भी होगा जो कोण DEF को समविभाजित करता है।

अतः इष्ट विन्दु वह बिन्दु है जहा पर EM और DL मिलते हैं, और इसलिये वह त्रिभुज DEF के, अर्थात् दंडों के मध्य-विन्दुओं के मिलाने से बने हुये त्रिभुज के अन्तः वृत्त का केन्द्र है।

१०६–(च) चतुष्फलक।

मान लो $ABCD$ एक चतुष्फलक है ; E, AB का मध्य-विन्दु है और G_1 आधार ABC का गुरूत्व-केन्द्र है।



ABC के समानान्तर चतुष्फलक का कोई परिच्छेद $A'B'C'$ लो ;

मान लो $DE, A'B'$ को E' पर और $DG_1, E'C'$ को G' पर मिलती हैं।

अब $\frac{E'G'}{EG_1}=\frac{DG'}{DG_1}$, समरूप त्रिभुजों $D'E'G'$ और DEG_1 से,

$=\frac{C'G'}{CG_1}$, समरूप त्रिभुजो $DG'C'$ और DG_1C से ।

$\therefore \frac{E'G'}{C'G'}=\frac{EG_1}{CG_1}=\frac{1}{2}$.

अतः G' परिच्छेद $A'B'C'$ का गुरुत्व-केन्द्र है ।

चतुष्फलक को आधार ABC के समानान्तर त्रिभुजों से बना हुआ मान कर यह परिणाम निकलता है कि प्रत्येक त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र DG_1 रेखा पर होने के कारण कुल चतुष्फलक का गुरुत्व-केन्द्र भी DG_1 पर होगा।

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि गुरुत्व-केन्द्र C को सम्मुख फलक के गुरुत्व-केन्द्र G_2 से मिलाने वाली रेखा पर हैं। G_2, ED रेखा पर भी हैं और उसे निष्पत्ति $1:2$ में विभाजित करता है ।

अतः इष्ट बिन्दु G, CG_2 और DG_1 का प्रतिच्छेद-बिन्दु है ।

G_1G_2 को मिला दो, तो

$\frac{G_2G}{GC}=\frac{G_2G_1}{DC}$, समरूप त्रिभुजों GG_2G_1 और GCD से,

$= \frac{EG_1}{EC}$, समरूप त्रिभुजों EG_1G_2 और ECD में,

$= \frac{1}{3}$.

$\therefore\ GC = 3.G_2G,$

$\therefore\ G_2C = 4.G_2G.$

इसी प्रकार $G_1D = 4G_1G.$

अत. चतुष्फलक का गुरुत्व-केन्द्र उस रेखा पर है जो उसके किसी फलक के गुरुत्व-केन्द्र को सम्मुख-शीर्ष से मिलाती है और फलक से इस दूरी की चौथाई के बराबर है ।

उपसाध्य । किसी चतुष्फलक का गुरुत्व केन्द्र वही है जो उसके शीर्षों पर रखे हुये चार बराबर कणों का होता है ।

क्योंकि त्रिभुज ABC के शीर्षों पर रखे हुये बराबर भार w, धारा १०४ में, उसके गुरुत्व-केन्द्र G_1 पर रखे हुये भार $3w$ के बराबर हैं । और G_1 पर रखा हुआ भार $3w$ और D पर रखा हुआ भार w, G पर, जो G_1D को निष्पत्ति $1:3$ में विभाजित करता है, रखे हुये भार $4w$ के बराबर है ।

१०७–(छ) किसी आधार पर सूची-स्तम्भ । ठोस शंकु ।

पिछली धारा में यदि सूची-स्तम्भ का आधार त्रिभुज की जगह कोई समतल आकृति $ABCLMN$ हो, जिसका गुरुत्व-केन्द्र G_1 है, तो उसी प्रकार से यह सिद्ध किया जा सकता है कि गुरुत्व-केन्द्र D को G_1 से मिलाने वाली रेखा पर होगा ।

धरातल DAG_1, DBG_1, ..खींच कर सूची-स्तम्भ को बहुत से त्रिभुजीय आधार के सूची-स्तम्भों में विभाजित किया जा सकता है जिन सबके गुरुत्व-केन्द्र $ABCL$ ....के समानान्तर एक धरातल पर होंगे जिसकी D से दूरी धरातल ABC.. की दूरी की तीन चौथाई होगी ।

अत. सूचीस्तम्भ का गुरुत्व केन्द्र G_1D पर होगा और उसे निष्पत्ति $1:3$ में विभाजित करेगा ।

उसकी सम भुजायें 7 इंच लम्बी हैं; उसके शीर्षों से गुरुत्व-केन्द्र की दूरियाँ मालूम करो।

४। त्रिभुज ABC के आधार BC का मध्य-बिन्दु D है; सिद्ध करो कि त्रिभुज ABD और ACD के गुरुत्व-केन्द्रों के बीच की दूरी $\frac{1}{3} BC$ है।

५। एक भारी त्रिभुजीय प्लेट भूमि पर रखी हुई है; यदि बिन्दु A पर कार्य करता हुआ एक ऊर्ध्वाधर बल उस शीर्ष को भूमि से ठीक उठा सकता है तो सिद्ध करो कि यदि वही बल B अथवा C पर लगाया जाय तो वह प्लेट को उठाने में पर्याप्त होगा।

६। तीन आदमी एक भार W को एक चिकने त्रिभुजीय तख्ते जिसका भार ω है, पर रख कर तथा तख्ते के शीर्षों को अपने अपने कंधे पर रख कर ले जा रहे है, बताओ प्रत्येक आदमी कितना कितना भार सम्हालता है।

७। एक त्रिभुज का आधार नियत है, और उसका शीर्ष एक ही दी हुई सरल रेखा पर चलता है, सिद्ध करो कि उसका गुरुत्व-केन्द्र भी एक सरल रेखा पर चलेगा।

८। एक त्रिभुज का आधार नियत है, और उसका शीर्ष-कोण भी दिया हुआ है; सिद्ध करो कि उसका गुरुत्व-केन्द्र किसी वृत्त के चाप पर चलेगा।

९। एक दिया हुआ भार एक त्रिभुज पर कहीं रखा हुआ है; सिद्ध करो कि समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र किसी त्रिभुज के भीतर होगा।

१०। एक समद्विबाहु त्रिभुजीय प्लेट एक भुजा के ऐसे बिन्दु से, जो उस भुजा को $2:1$ की निष्पत्ति में विभाजित करता है, बँधी हुई एक डोरी से लटकी हुई है; इस भुजा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो।

११। एक समकोण त्रिभुज के रूप का एक सम पटल जो इस प्रकार है कि समकोण बनाती हुई भुजाओं में से एक दूसरी से तिगुनी है, समकोण से बँधी हुई एक डोरी से लटका हुआ है; सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में कर्ण ऊर्ध्वाधर से कोण ज्या$^{-1}\frac{3}{5}$ बनाता है।

१२। एक सम त्रिभुजीय पटल जिसकी भुजायें 3, 4, और 5 इंच

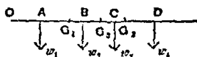
है, सबसे बड़ी भुजा के मध्य बिन्दु से बँधी हुई डोरी से लटका हुआ है ; इस भुजा का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो ।

१०९—गुरुत्व-केन्द्र निकालने के व्यापक सूत्र ।

आगे की धाराओं मे, वे सूत्र निकाले जायँगे जिनसे उन कणों के किसी समुदाय के, जिनके स्थान और भार ज्ञात हों, गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम हो जायगा ।

साध्य—यदि कणों का कोई समुदाय, जिनके भार $w_1, w_2, ...w_n$ है, एक सरल रेखा मे हो, और यदि उनकी दूरियाँ रेखा के किसी नियत बिन्दु O से $x_1, x_2, ..., x_n$ हों, तो नियत बिन्दु से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी के $\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$ है ।

मान लो $A, B, C, D, \ldots$ कण है और मान लो A और B पर w_1 और w_2 का गुरुत्व-केन्द्र G_1 है ; और मान लो G_1 पर (w_1+w_2) और



C पर w_3 का गुरुत्व-केन्द्र G_2 है, और इसी प्रकार से समुदाय के और कणों के लिये भी है ।

धारा ७ से, $w_1 AG_1 = w_2 G_1 B$;

$$\therefore w_1 (OG_1 - OA) = w_2 (OB - OG_1).$$

अतः $(w_1+w_2).OG_1 = w_1.OA + w_2.OB$,

$$\therefore OG_1 = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

इसी प्रकार, चूँकि G_1 पर (w_1+w_2) और C पर w_3 का गुरुत्व-केन्द्र G_2 है, इसलिये,

$$OG_2 = \frac{(w_1+w_2).OG_1 + w_3 OC}{(w_1+w_2)+w_3}$$

$$=\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3}{w_1 + w_2 + w_3}, \ \ldots \ (१) \text{ से.}$$

इसी प्रकार $$OG_3=\frac{(w_1 + w_2 + w_3).\ OG_2 + w_4.\ OD}{(w_1+w_2+w_3)+w_4}$$

$$=\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}.$$

इसी प्रकार से चाहे समुदाय के कणों की संख्या कुछ भी क्यों न हो,

$$\bar{x}=\frac{w_1 x_1+w_2 x_2+\ldots+w_n x_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}.$$

अन्यथा। ऊपर का सूत्र धारा ६५ के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है। क्योंकि कणों के भार समानान्तर बलों के एक समुदाय में पड़ते हैं जिनका परिणामीबल उनके योग अर्थात् $w_1+w_2+\ldots+w_n$ के बराबर है, और बलों के धरातल में किसी बिन्दु पर इन बलों के घूर्णों का योग वही है जो परिणामीबल का घूर्ण है। परन्तु नियत बिन्दु O पर बलों के घूर्णों का योग $w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n$ है। अतः यदि O से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\bar{x}$ है तो परिणामीबल का घूर्ण $(w_1+w_2+\ldots+w_n)\times\bar{x}$ है।

अतः $\bar{x}\ (w_1+w_3+\ldots+w_n)=w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n$;

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}.$$

११०—उदाहरण १। एक छड़ AB, जिसकी लम्बाई 2 फुट है और भार 5पौ० है, C और D बिन्दुओं पर त्रिसमविभाजित है, और A,C,D और B बिन्दुओं पर क्रम से 1,2,3 और 4 पौ० के भार रखे हुये हैं, बताओ छड़ को किस बिन्दु से सम्हाले कि वह किसी भी अवस्था में समतुलित रहे अर्थात् समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

मान लो G छड़ का मध्य-बिन्दु है और पिछली धारा का नियत बिन्दु O छड़ के सिरे A पर पड़ता है। इस प्रकार x_1, x_2, x_3, x_4 और x_5 क्रम से 0, 8, 12, 16, और 24 इंच हैं।

अतः यदि x इष्ट विन्दु है, तो

$$AX=\frac{1.0+2.8+5.12+3.16+4.24}{1+2+5+3+4}=\frac{220}{15}=14\tfrac{2}{3}\text{ इंच ।}$$

उदाहरण २। यदि पिछले प्रश्न में B पर रखा हुआ पिंड हटा दिया जाय और उसकी जगह एक दूसरा पिंड रख दिया जाय, तो इस अज्ञात पिंड का भार मालूम करो यदि नया गुरुत्व-केन्द्र छड़ के मध्य-विन्दु पर हो।

मान लो इष्ट भार λ पौं० है।

चूंकि A से नये गुरुत्व-केन्द्र की दूरी 12 इंच है, इसलिये

$$12=\frac{1.0+2.8+5.12+3.16+\lambda.24}{1+2+5+3+\lambda}=\frac{124+24\lambda}{11+\lambda}.$$

$$\therefore\ 132+12\lambda=124+24\lambda,$$

$$\therefore\ \lambda=\tfrac{2}{3}\text{ पौं० ।}$$

उदाहरण ३। एक दंड के सिरे पर जिसकी लम्बाई 2 फुट है और भार 3 पौं० है एक गोला लगा हुआ है जिसकी त्रिज्या 2 इंच और भार 10 पौं० है; मिश्रित पिंड के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

मान लो OA दंड है, G_1 उसका मध्य-विन्दु है, G_2 गोले का केन्द्र है और G इष्ट विन्दु है, तो

$$OG=\frac{3.OG_1+10.OG_2}{3+10}.$$

परन्तु $OG_1=12$ इंच ; $OG_2=26$ इंच ;

$$\therefore\ OG=\frac{3.12+10.26}{3+10}=\frac{296}{13}=22\tfrac{10}{13}\text{ इंच ।}$$

उदाहरणमाला १६

१। एक सीधे दंड की लम्बाई 1 फुट और भार 1 औंस है। उसके एक सिरे पर एक औंस सीसा लगा हुआ है और उसके दूसरे सिरे

छड़ की लम्बाई की एक-तिहाई दूरी पर एक औंस और सीसा लगा हुआ है, समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

२। एक सम दंड जिसकी लम्बाई 3 फुट और भार 6 औं॰ तीन तीन औं॰ भार के हैं, पर तीन छल्ले उसके एक सिरे से 3, 15, और 21 इंच की दूरी पर हैं। दंड किस बिन्दु पर समतुलित होगा?

३। एक सम दंड AB 4 फुट लम्बा और 3 फुट भारी है। एक पौंड भार A पर, 2 पौं॰ A से एक फुट की दूरी पर, 3 पौं॰ A से 2 फुट की दूरी पर, 4 पौं॰ A से 3 फुट की दूरी पर और 5 पौं॰ B पर लगे हुये हैं। A से समुदाय के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

४। एक दूरबीन में तीन नलियां हैं, जिनमें से हर एक 10 इंच लम्बी है। नलियाँ एक दूसरे के भीतर हैं, और उनके भार 8, 7, और 6 औं॰ हैं। उसके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो जब नलियाँ पूरी पूरी खींच ली जायँ।

५। एक सीधे दंड पर एक एक इंच की दूरी पर 12 भारी कण रखे हैं जिनके भार क्रमसे 1, 2, 3, ,12 ग्रेन हैं; दंड के भार को नगण्य मान कर उसका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

६। 1, 4, 9, और 16 के अनुपात में भार एक सरल रेखा में इस प्रकार रखे हुये हैं कि उनके बीच की दूरियाँ बराबर हैं, उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

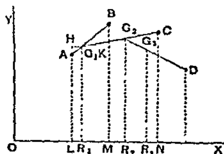
७। समान मोटाई के एक दंड की आधी लम्बाई एक धातु की और दूसरी आधी लम्बाई एक दूसरी धातु की है। दंड एक सिरे से अपनी लम्बाई की एक-तिहाई दूरी के एक बिन्दु पर समतुलित होता है। धातुओं के बराबर बराबर परिमाणों के भारों की तुलना करो।

८। एक आनत तल, जिसका झुकाव 60° है, 3 फुट लम्बा है; उस पर एक एक फुट की दूरी पर क्रम से 7, 5, 4, और 8 औं॰ के भार रखे हुये हैं जबकि अन्तिम भार सबसे ऊँचा है; आनत तल के आधार से उन भारों के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

९। AB एक सम दंड है जिसकी लम्बाई n इंच है और भार $(n+1)W$ है। A से क्रमशः 1, 2, 3,... n इंच की दूरी पर भार W, $2W$, $3W$, ...nW लगे हुये हैं। A से दंड और भारों के गुरुत्व केन्द्रों की दूरी मालूम करो।

१०। 12 फुट लम्बे दंड के एक सिरे से 1 पौ० का एक भार लटका हुआ है, और जब दूसरे सिरे से 15 पौ० का भार लटकाया जाय तो वह उस सिरे से 3 फुट की दूरी के एक विन्दु पर समतुलित होता है, परन्तु यदि उस सिरे पर 8 पौ० का भार लटकाया जाय तो उस सिरे से 4 फुट की दूरी के एक विन्दु पर समतुलित होता है। दंड का भार और उसके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

१११—साध्य। यदि कणों का एक समुदाय, जिनके भार $w_1, w_2, \ldots, w_n$ हैं, एक समतल में हों, और यदि उस समतल में OX और OY दो नियत लम्ब रेखायें हों, और यदि OX से कणों की दूरियाँ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ हों, और उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\bar{y}$ हो, तो



$$\bar{y} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2 + \ldots w_n y_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}.$$

इसी प्रकार यदि OY से कणों की दूरियाँ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हों और उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\bar{x}$ हो, तो

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}.$$

मान लो $A, B, C, \ldots$ कण हैं और $AL, BM, CN, \ldots OX$ परल म्ब हैं।

मान लो w_1 और w_2 का गुरुत्व-केन्द्र G_1 है, G_1 पर (w_1+w_2) और C पर w_3 का गुरुत्व-केन्द्र G_2 है, इत्यादि।

OX पर $G_1R_1, G_2R_2, \ldots$ लम्ब खींचो, और G_1 से होकर HG_1K, OX के समानान्तर खीचो जो AL और BM को H और K पर मिले।

क्योंकि G_1, w_1 और w_2 का गुरुत्व-केन्द्र है, इसलिये

$$\frac{AG_1}{G_1B}=\frac{w_2}{w_1}. \quad \text{(धारा ९७)}.$$

क्योंकि त्रिभुज AG_1H और BG_1K समरूप हैं,

$$\therefore \frac{HA}{BK}=\frac{AG_1}{G_1B}=\frac{w_2}{w_1}.$$

परन्तु $HA=HL-AL=G_1R_1-y_1$,

और $BK=BM-KM=y_2-G_1R_1$;

$$\therefore \frac{G_1R_1-y_1}{y_2-G_1R_1}=\frac{w_2}{w_1}.$$

अतः $w_1(G_1R_1-y_1)=w_2(y_2-G_1R_1)$;

$$\therefore G_1R_1=\frac{w_1y_1+w_2y_2}{w_1+w_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

इसी प्रकार क्योंकि G_1 पर (w_1+w_2) और C पर w_3 का गुरुत्व-केन्द्र G_2 है, इसलिये

$$G_2R_2=\frac{(w_1+w_2).G_1R_1+w_3y_3}{w_1+w_2+w_3}=\frac{w_1y_1+w_2y_2+w_3y_3}{u_1+w_2+w_3}, \text{ (१) से।}$$

इस प्रकार क्रिया करके

$$\bar{y}=\frac{w_1y_1+w_2y_2+\ldots+w_ny_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}.$$

पुन चूंकि त्रिभुज AG_1H और BG_1K समरूप है, इसलिये

$$\frac{HG_1}{G_1K}=\frac{AG_1}{G_1B}=\frac{w_2}{w_1}.$$

परन्तु $HG_1 = LR_1 = OR_1 - OL = OR_1 - x_1$,

और $G_1K = R_1M = OM - OR_1 = x_2 - OR_1$.

$$\therefore \; w_1 (OR_1 - x_1) = w_2 (x_2 - OR_1).$$

अतः $$OR_1 = \frac{w_1x_1 + w_2x_2}{w_1 + w_2}.$$

पहले की ही भाँति क्रिया करके अन्त में

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

इस धारा के साध्य को इस प्रकार भी लिख सकते हैं ;

धरातल में किसी रेखा से कणों के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी एक भिन्न के बराबर है जिसका अंश प्रत्येक भार और दी हुई रेखा से उसकी दूरी के गुणनफलों का योग और हर भारों का योग है, अर्थात् गुरुत्व केन्द्र की दूरी कणों की औसत दूरी के बराबर है ।

११२—पिछली धारा का सूत्र धारा ९३ से निकाला जा सकता है क्योंकि G पर कार्य करता हुआ परिणामी भार $(w_1 + w_2 + \dots + w_n)$, जहाँ पर G सब भारों का गुरुत्व-केन्द्र है, अवयव भारों $w_1, w_2, .$ के बराबर है, अतः यदि रेखा OX नियत अक्ष मान ली जाय, तो परिणामी बल का इस नियत अक्ष पर वही घूर्ण होगा जो अवयव बलों का है ।

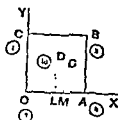
परन्तु परिणामीबल का घूर्ण $(w_1 + w_2 + \dots + w_n)\bar{y}$ है, और भारों के घूर्णों का योग $w_1y_1 + w_2y_2 + \dots + w_ny_n$ है ।

अतः $$\bar{y} = \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + \dots + w_ny_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

इसी प्रकार $$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

११३—उदाहरण १ । एक वर्गाकार पटल जिसका भार 10 पौं० है, के शीर्षों पर क्रम से 3,6,5, और 1 पौं० भार के कण रखे हुये हैं । समुदाय के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो, यदि पटल की भुजा 25 इंच है ।

मान लो कण शीर्ष $O, A, B,$ और C पर रखे हुये हैं। मान लो दो नियत रेखायें जिनसे दूरियाँ नापी गई हैं, OA और OC हैं।



पटल का भार उसके केन्द्र D पर कार्य करता है। मान लो G इष्ट गुरुत्व-केन्द्र है। OX पर DL और GM लम्ब खींचो।

OX से बिन्दु $O, A, B, C,$ और D की दूरियाँ क्रम से 0, 0, 25, 25, और $12\frac{1}{2}$ इंच हैं।

$$\therefore \ MG = y = \frac{3.0+6.0+5.25+1.25+10.12\frac{1}{2}}{3+6+5+1+10} = \frac{275}{25} = 11 \text{ इंच।}$$

इसी प्रकार OY से कणों की दूरियाँ क्रमसे 0, 25, 25, 0, और $12\frac{1}{2}$ इंच हैं।

$$\therefore OM = x = \frac{3.0+6.25+5.25+1.0+10.12\frac{1}{2}}{3+6+5+1+10} = \frac{400}{25} = 16 \text{ इंच।}$$

अत इष्ट बिन्दु O से OA पर 16 इंच नाप कर और फिर 11 इंच का लम्ब डाल कर मालूम किया जा सकता है।

उदाहरण २। OAB एक हल्का समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका आधार OA, 6 इंच है और जिसकी भुजायें प्रत्येक 5 इंच है, $D, A,$ और B बिन्दुओं पर 1, 2, और 3 पौ० भार के कण रखे हुये हैं; उनका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

मान लो नियत रेखा OX, OA पर पड़ती है और मान लो OY, O से होकर AO पर लम्ब है।

यदि OA पर BL लम्ब डाला जाय, तो $OL = 3$ इंच और $LB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ इंच।

अत: यदि G इष्ट गुरुत्व-केन्द्र है और GM, OX पर लम्ब है, तो

$$OM=\frac{1.0+2.6+3.3}{1+2+3}=\frac{21}{6}=3\tfrac{1}{2} \text{ इंच},$$

और
$$MG=\frac{1.0+2.0+3\cdot4}{1+2+3}=\frac{12}{6}=2 \text{ इंच}।$$

अतः इष्ट विन्दु O से OA पर $3\frac{1}{2}$ इंच नाप कर और फिर 2 इंच का लम्ब डाल कर मालूम हो जाता है।

११४—समानान्तर बलों का केन्द्र।

धारा १०९ और १११ के सूत्रों और रीतियों का प्रयोग केवल भारों में ही नहीं होता परन्तु समानान्तर बलों में भी होता है और ऐसे बलों के समुदाय के परिणामीबल के स्थान के निकालने में भी होता है। परिणामी-बल परिमाण में बलों के योग के बराबर है, जबकि हरएक बल के पहले उसका उचित चिन्ह रखा हो।

एक स्थिति ऐसी भी है जब हमें कोई सतोषजनक परिणाम नहीं मिलता है। यदि बलों का बीजीय योग शून्य हो तो परिणामीबल भी शून्य होगा और धारा १११ के सूत्र से $\bar{x}=\infty$, और $\bar{y}=\infty$.

इस स्थिति में समानान्तर बलों का समुदाय, जैसा धारा ५३ में देख आये हैं, एक बलयुग्म के बराबर होगा।

उदाहरणमाला १७

१। 1, 2, 3, और 4 पौं० भार के कण एक वर्ग के शीर्षों पर रक्खे हुये हैं; वर्ग के केन्द्र से उसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

२। $ABCD$ वर्ग के A और C सम्मुख कोणों पर दो दो पौंड के भार और B और D पर क्रमसे 1 और 7 पौं० के भार रक्खे हुये हैं; उनका गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

३। एक क्षैतिज वर्ग के A, B, C, और D कोनों पर क्रम से 5, 6 9, और 7 पौं० भार के कण रक्खे हुये हैं, वर्ग की भुजा की लम्बाई 27 इंच है; बताओ कहाँ पर एक मात्र बल लगाया जाय कि वर्ग समतुलित रहे।

४। 1, 2, 3, 4, और 5 पौ० के पाँच भार एक वर्गाकार मेज़ पर रखे हुये हैं। मेज़ के एक किनारे से इनकी दूरियाँ क्रमसे 2, 4, 6, 8, और 10 इंच हैं और सलग्न किनारे से 3, 5, 7, 9, और 11 इंच हैं। दोनों किनारों से उनके गुरूत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

५। 1, 2, और 3 के अनुपात मे भार एक समत्रिबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा की लम्बाई a है, के कोनों पर, रखे हुये हैं; पहले भार से उनके गुरूत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

उस समय भी दूरी मालूम करो जब भार 11, 13, और 6 के अनुपात मे हों।

६। *ABC* एक समत्रिबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 2 फुट है। *A, B*, और *C* पर 5, 1, और 3 के अनुपात में और *BC, CA*, और *AB* भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर 2, 4, और 6 के अनुपात मे भार रखे हुये हे; सिद्ध करो कि उनका गुरूत्व-केन्द्र *B* से 16 इंच की दूरी पर है।

७। एक भारी त्रिभुजीय पटल के शीर्षों पर और उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर एक एक औंस के भार रखे हुये हैं; भारों के गुरूत्व केन्द्र का स्थान मालूम करो।

८। *ABC* एक त्रिभुज है जो *A* पर समकोणिक है। *AB*, 12 इंच और *AC*, 15 इंच हैं; 2, 3, और 4 के अनुपात में भार *A, C*, और *B* पर रखे हुये हैं; *B* और *C* से उनके गुरूत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

९। 4, 1, और 1 पौ० भार के कण एक त्रिभुज के शीर्ष पर रखे हुये हैं; सि करो कि कणों का गुरूत्व-केन्द्र त्रिभुज के गुरूत्व-केन्द्र और एक शीर्ष के बीच की दूरी को समविभाजित करता है।

१०। *ABC* त्रिभुज के शीर्ष पर तीन भार रखे हुये हैं। बताओ भारों में क्या निष्पति होगी यदि उनका जड़त्व-केन्द्र *A* और *BC* के मध्य-बिन्दु के बीचोबीच हो।

११। 2, 3, और 4 पौं० भार के पिंड क्रम मे त्रिभुज के शीर्ष *A, B*,

और C पर रखे हुये हैं ; उनका गुरूत्व केन्द्र G मालूम करो और सिद्ध करो कि बल $2GA$, $3GB$, और $4GC$ समतुलित है ।

१२ । ABC एक समत्रिभुजीय प्लेट है जिसका भार 3 पौं० हैं । 2, 3, और 5 पौं० के भार क्रम से A, B, और C पर रखे हुये हैं । समुदाय के गुरूत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो ।

१३ । एक सम त्रिभुजीय प्लेट के शीर्ष A, B, और C पर 2, 2, और 11 पौं० भार के क्रम रखे हुये हैं ; प्लेट का भार 3 पौं० है और उसका गुरूत्व-केन्द्र G है ; सिद्ध करो कि समुदाय का गुरूत्व-केन्द्र GC का मध्य-बिन्दु है ।

१४ । 2, 3, 2, 6, 9 और 6 पौं० के भार क्रम से एक सम षट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; उनका गुरूत्व-केन्द्र मालूम करो ।

१५ । 5, 4, 6, 2, 7, और 3 के अनुपात में भार क्रम से एक सम षट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; सिद्ध करो कि उनका गुरूत्व केन्द्र षट्भुज का केन्द्र है ।

१६ । 1, 5, 3, 4, 2, और 6 के अनुपात में भार क्रम से एक सम षट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं ; सिद्ध करो कि उनका गुरूत्व-केन्द्र षट्भुज का केन्द्र है ।

१७ । यदि 1, 2, 3, 4, 5, और 6 के अनुपात में भार क्रम से एक सम षट्भुज के शीर्षों पर रखे हुये हैं तो सिद्ध करो कि उनके गुरूत्व-केन्द्र की षट्भुज के वाह्य-वृत्त के केन्द्र से दूरी वृत्त की त्रिज्या की $\frac{2}{7}$ गुनी है ।

१८ । एक वर्ग के शीर्षों पर, क्रमसे 1 : 3 : 5: 7 की निष्पत्ति में समानान्तर बल कार्य करते हैं ; वर्ग के केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी मालूम करो जहाँ पर उनका परिणामीबल कार्य करता है ।

१९ । A, B, C, और D क्रम से एक समानान्तर चतुर्भुज के कोण हैं, 6, 10, 14, और 10 के अनुपात में सम समानान्तर बल क्रम से A, B, C, और D पर कार्य करते हैं ; सिद्ध करो कि इन समानान्तर बलों का केन्द्र और परिणामीबल वही रहेगा यदि इन बलों की जगह 8, 12, 16, और 4 के . . .

में समानान्तर बल क्रम से AB, BC, CD, और DA भुजाओं के मध्य-विन्दुओं पर कार्य करें।

२०। समानान्तर बल P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, और $6P$ का केन्द्र मालूम करो, जिनके प्रयोग-विन्दु AB रेखा पर दिये हुये विन्दु A से क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 इञ्च की दूरी पर हैं।

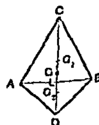
२१। एक त्रिभुज के A, B, और C शीर्षों पर P, Q, और R तीन समानान्तर बल जो क्रम से a, b, और c के अनुपात में हैं, कार्य करते हैं। उनके परिणामीबल का परिमाण और स्थान मालूम करो।

११५—यदि किसी पिंड के दो भागों के गुरुत्व-केन्द्र दिये हुये हों, तो पूरे पिंड का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो दिये हुये गुरुत्व-केन्द्र G_1 और G_2 हैं, और मान लो इन भागों के भार W_1 और W_2 हैं ; धारा ९७ से इष्ट विन्दु G, G_1G_2 को इस प्रकार विभाजित करता है कि $G_1G : GG_2 :: W_2 : W_1$.

विन्दु G धारा १०९ के प्रयोग से भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण। एक ही आधार AB पर विपरीत दिशाओं में समद्विबाहु त्रिभुज CAB और DAB खींचे गये हैं जिनकी ऊँचाइयाँ क्रम से 12 और 6 इंच हैं। AB से चतुर्भुज $CADB$ के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।



मान लो AB पर CLD लम्ब है जो उसे L पर मिलता है, और मान लो दोनों CAB और DAB त्रिभुजों के गुरुत्व-केन्द्र क्रम से G_1 और G_2 हैं। अत: $CG_1 = \frac{2}{3}.CL = 8$, और $CG_2 = CL + LG_2 = 12 + 2 = 14$.

त्रिभुजों के भार उनके क्षेत्रफलों, अर्थात् $\frac{1}{2}AB.12$ और $\frac{1}{2}AB.6$ के अनुपात में हैं।

∴ यदि पूरे चित्र का गुरुत्व-केन्द्र G है, तो

$$CG = \frac{\triangle CAB \times CG_1 + \triangle DAB \times CG_2}{\triangle CAB + \triangle DAB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} AB.12 \times 8 + \frac{1}{2} AB \; 6 \times 14}{\frac{1}{2} AB.12 + \frac{1}{2} AB.6} = \frac{48 + 42}{6 + 3} = \frac{90}{9} = 10.$$

अतः $LG = CL - CG = 2$ इन्च।

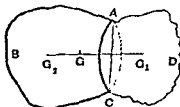
पतले कार्डबोर्ड से चित्र काट कर परिमाण की जाँच प्रयोगात्मक रीति से की जा सकती है।

११६—यदि पूरे पिंड और उसके एक भाग के गुरुत्व-केन्द्र दिये हुये हों, तो शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो पिंड $ABCD$ का गुरुत्व-केन्द्र G है और भाग ADC का गुरुत्व-केन्द्र G_1 है।

मान लो पूरे पिंड का भार W है और ACD भाग का भार W_1 है, तो ABC भाग का भार $W_2 (= W - W_1)$ होगा।

मान लो भाग ABC का गुरुत्व-केन्द्र G_2 है। चूँकि पिंड के दोनों भाग मिलकर पूरा पिंड बनाते हैं इसलिये G_1 पर W_1 और G_2 पर W_2 का गुरुत्व-केन्द्र G पर होगा।



अत G, G_1G_2 पर इस प्रकार होगा कि $W_1.GG_1 = W_2.GG_2$.

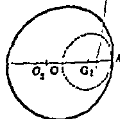
अतः यदि G और G_1 दिये हुये हों, तो हम G_2 मालूम कर सकते हैं यदि G_1G को G_2 तक इस प्रकार बढ़ायें कि

$$GG_2 = \frac{W_1}{W_2} . \; GG_1 = \frac{W_1}{W - W_1} . \; GG_1$$

दृष्ट बिन्दु धारा १० के द्वारा भी मालूम किया जा सकता है ।

उदाहरण १ । एक वृत्तीय मंडल में से, जिसकी त्रिज्या r है, एक वृत्त काटा गया है जिसका व्यास मंडल की एक त्रिज्या है; शेष का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।

क्योंकि वृत्तों के क्षेत्रफल उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के अनुपात में हैं, इसलिये



कटे हुये भाग का क्षेत्रफल : पूरे वृत्त का क्षेत्रफल

$$:: \left(\frac{r}{2}\right)^2 : r^2$$

$$:: \quad 1 : 4.$$

अतः कटा हुआ भाग पूरे का एक-चौथाई है और शेष भाग पूरे का तीन-चौथाई है, इसलिये $W_1 = \frac{1}{3} W_2$.

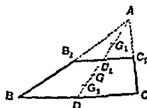
अब भाग W_1 और W_2 मिलकर पूरा मंडल बनाते हैं; इसलिये वे O पर समतुलित हैं । अतः

$$W_2.OG_2 = W_1.OG_1 = \tfrac{1}{3} W_2 \times \tfrac{1}{2} r,$$

$$\therefore \; OG_2 = \tfrac{1}{6} r.$$

इसकी प्रयोगात्मक रीति से जाँच की जा सकती है ।

उदाहरण २ । एक त्रिभुजीय पटल ABC से उसके आधार BC के समानान्तर रेखा द्वारा उसके क्षेत्रफल का एक चौथाई भाग काट लिया गया है; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो ।



मान लो AB_1C_1 भाग काट लिया गया है,

$\therefore \; \triangle AB_1C_1 : \triangle ABC :: 1 : 4.$

ज्यामिति से, क्योंकि त्रिभुज AB_1C_1 और ABC समरूप हैं,

$\therefore \; \triangle AB_1C_1 : \triangle ABC :: AB_1^2 : AB^2,$

$\therefore AB_1^2 : AB^2 :: 1 : 4,$

और इसलिये $AB_1 = \frac{1}{2} AB.$

इसलिये रेखा B_1C_1, AB, AC, और AD को समविभाजित करती है।

मान लो G और G_1 क्रमसे त्रिभुज ABC और AB_1C_1 के गुरुत्व-केन्द्र हैं ; और मान लो W'_1 और W'_2 क्रमसे कटे हुये भाग और शेष भाग के भार हैं, तो $W'_2 = 3W'_1$.

क्योंकि G_2 पर W'_2 और G_1 पर W'_1, G पर समतुलित है , इसलिये धारा १०९ से,

$$DG = \frac{W'_1 . DG_1 + W'_2 DG_2}{W'_1 + W'_2} = \frac{DG_1 + 3DG_2}{4} \quad \ldots \quad (१).$$

परन्तु $DG = \frac{1}{3} DA = \frac{2}{3} DD_1,$

और $DG_1 = DD_1 + \frac{1}{3} D_1A = DD_1 + \frac{1}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1.$

अतः (१) से $4 \times \frac{2}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1 + 3DG_2.$

$\therefore DG_2 = \frac{4}{9} DD_1.$

इस परिमाण की प्रयोगात्मक रीति से भी सरलतापूर्वक जाँच की जा सकती है।

उदाहरणमाला १८

[विद्यार्थी को चाहिये कि निम्नलिखित प्रश्नों में से कुछ प्रश्नों की प्रयोगात्मक रीति से जाँच करें; इसके लिये उपयुक्त प्रश्न संख्या १, २, ४, ५, ८, ९, १०, ११, १७, १८, और १९ हैं।]

१। एक सम दंड, जिसकी लम्बाई एक फुट है, 5 और 7 इंच के दो भागों में तोड़ कर अक्षर T के रूप में रखा गया है, बड़ा भाग ऊर्ध्वाधर है ; समुदाय का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

२। एक ही कार्डबोर्ड के दो आयताकार टुकड़े, जिनकी लम्बाई क्रम से 6 इंच और 8 इंच और चौड़ाई 2 और $2\frac{1}{2}$ इंच है, एक दूसरेको स्पर्श करते हुये (न कि ढकते हुये) एक मेज पर T रूप का चित्र बनाते हुये

रखे हुये है, बड़ा भाग ऊर्ध्वाधर है। उसके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

३। एक भारी छड़ के दो भाग हैं, जिनकी लम्बाईयां 3:5 और जिनके भार 3 1 की निष्पत्ति में हैं; उसके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

४। एक आयत की दो भुजायें दूसरी दो भुजाओं से दुगनी हैं और बड़ी भुजाओं में से एक पर एक समत्रिबाहु त्रिभुज खींचा गया है; आयत और त्रिभुज से बने हुये पटल का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

५। कार्डबोर्ड का एक टुकड़ा *ABCD* एक वर्ग और उसकी भुजा *BC* पर खींचे गये एक समद्विबाहु त्रिभुज के रूप में है; यदि वर्ग की भुजा 12 इंच और त्रिभुज की ऊँचाई 6 इंच है तो *AD* रेखा से कार्डबोर्ड के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

६। एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की सब भुजाओं पर बाहर की ओर वर्ग खींचे हुये हैं। सिद्ध करो कि इस प्रकार बने हुये चित्र का गुरुत्व-केन्द्र उस रेखा पर है जो कर्ण को समविभाजित करती है और समकोण से होकर गुजरती है और उसे 1 26 की निष्पत्ति में विभाजित करती है।

७। एक ही धातु के दो सम गोले, जिनके व्यास क्रम से 6 और 12 इंच हैं, जुड़े हुये हैं; उनके गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

८। एक समानान्तर चतुर्भुज में से उन चार भागों में से एक भाग काट दिया गया है जिनमें उसके कर्ण उसे विभाजित करते हैं; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

९। एक समानान्तर-चतुर्भुज को भुजाओं के मध्य-बिन्दु मिलाकर चार भागों में विभाजित किया गया है और उनमें से एक भाग काट दिया गया है; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१०। एक वर्ग से एक त्रिभुजीय भाग वर्ग की दो संलग्न भुजाओं को मिलाने वाली रेखा पर से काट कर अलग कर दिया गया है; शेष भाग का गुरुत्व केन्द्र मालूम करो।

११। एक त्रिभुज में से उसके क्षेत्रफल का $\frac{1}{9}$ भाग आधार के समानान्तर एक रेखा से काट दिया गया है; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१२। ABC एक समत्रिबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजा 6 इंच है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र O है। यदि त्रिभुज OBC काट दिया जाय, तो शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१३। यदि त्रिभुज ABC से तीन बराबर बराबर त्रिभुज ARQ, BPR, और CQP काट दिये जायें, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज ABC और PQR के जड़त्व-केन्द्र एक ही होंगे।

१४। G एक दिये हुये समद्विबाहु त्रिभुज का गुरुत्व-केन्द्र है जो A पर समकोणिक है और जिसमे BC, a के बराबर है। भाग GBC काट दिया गया है; शेष भाग के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी A से मालूम करो।

१५। दो त्रिभुज ABC और $A'BC$ एक ही आधार BC पर बने है, शीर्ष A' पहले त्रिभुज के भीतर है। A' का स्थान मालूम करो यदि वह दोनों त्रिभुजों के बीच के क्षेत्रफल का गुरुत्व-केन्द्र हो।

१६। दो त्रिभुज, जिनमे से प्रत्येक पूरे त्रिभुज का $\frac{1\text{वां}}{m}$ भाग है, एक दिये हुये त्रिभुज के दो शीर्षो B और C से सम्मुख की भुजाओं के समानान्तर रेखाओं से काट दिये गये हैं; शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१७। बताओ एक वर्गाकार प्लेट में से किस प्रकार वर्ग की भुजा को आधार मान कर एक त्रिभुज काटा जाय कि शेष भाग का गुरुत्व-केन्द्र इस त्रिभुज के शीर्ष पर हो अर्थात् यदि वह इस बिन्दु से साधा जाय तो किसी भी अवस्था में समतुलित रहे।

१८। एक 10 इंच वर्ग धातु के सम प्लेट में से एक 3 वर्ग इंच का छेद कटा हुआ है। छेद का केन्द्र प्लेट के केन्द्र से $2\frac{1}{2}$ इंच दूर है; प्लेट के शेष भाग के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

१९। 3 फुट त्रिज्या के एक वृत्तीय मंडल से किस जगह एक

फुट त्रिज्या का छेद काटा जाय कि शेष का गुरूत्व-केन्द्र मंडल के केन्द्र से 2 इंच दूर हो ?

२०। दो गोले, जिनकी त्रिज्यायें a और b हैं, एक दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं ; दोनों के बीच के भाग का गुरूत्व-केन्द्र मालूम करो।

२१। यदि एक सम शंकु को एक धरातल द्वारा ऊँचाई को समविभाजित करते हुये समकोण पर काट दिया जाय, तो इस प्रकार कटे हुये छिन्न के गुरुत्व-केन्द्र की शंकु के शीर्ष से दूरी मालूम करो।

२२। समांगिक लोहे का एक ठोस समवृत्तीय शंकु, जिसकी ऊँचाई 64 इंच और भार 8192 पौ० है, अक्ष के लम्ब धरातल से इस प्रकार काटा गया है कि कटे हुये छोटे शंकु का भार 686 पौ० है ; कटे हुये छिन्न के गुरूत्व-केन्द्र की आधार से ऊँचाई मालूम करो।

२३। एक ठोस समवृत्तीय शंकु का आधार इस प्रकार खोदा गया है कि खोखला भाग उसी आधार पर एक सम शंकु बन जाता है ; बताओ शंकु कितना खोदा जाय कि शेष भाग का गुरूत्व-केन्द्र खोखले के शीर्ष पर हो ?

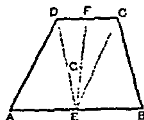
२४। चांद की मात्रा पृथ्वी की, मात्रा की ·013 गुनी है। पृथ्वी की त्रिज्या 4000 मील और चांद के केन्द्र से पृथ्वी के केन्द्र की दूरी पृथ्वी की त्रिज्या को 60 गुना मान कर, पृथ्वी और चांद के गुरूत्व-केन्द्र की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी मालूम करो।

११७–अर्द्धगोले का गुरूत्व-केन्द्र।

यदि अर्द्धगोले की त्रिज्या r है, तो उसका गुरूत्व-केन्द्र उस त्रिज्या पर होगा जो उसके समतल फलक पर लम्ब है और समतल फलक के केन्द्र से उसकी दूरी $\frac{3r}{8}$ होगी। यदि अर्द्धगोला खोखला हो, तो यह दूरी $\frac{r}{2}$ होगी। प्रारम्भिक रीति मे इनके प्रमाण कठिन है, अतः वे अन्तिम अध्याय में दिये गये हैं।

११८–उस चतुर्भुज पटल का गुरूत्व-केन्द्र मालूम करना जिसकी दो भुजायें समानान्तर हैं।

मान लो $ABCD$ चतुर्भुज है जिसकी भुजायें AB और CD समानान्तर हैं और क्रम से $2a$ और $2b$ के बराबर हैं।



मान लो AB और CD के मध्य-बिन्दु E और F हैं। DE और EC को मिला दो। ADE, DEC, और BEC त्रिभुजों के क्षेत्रफल उनके आधार AE, DC, और EB अर्थात् a, $2b$, और a के अनुपात में हैं।

त्रिभुजों की जगह उनके शीर्षों पर उनके भार के एक तिहाई भार के कण रक्खो (धारा १०४)।

इस प्रकार C और D पर $\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}$ के अनुपात में, A और B पर $\frac{a}{3}$ के अनुपात में और E पर $\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}$ के अनुपात में भार है।

अब C और D पर रक्खे हुये बराबर भारों को CD के मध्य-बिन्दु F पर $\frac{2a}{3}+\frac{4b}{3}$ के अनुपातीय, और A और B पर रक्खे हुये बराबर भारों को E पर $\frac{2a}{3}$ के अनुपातीय भार से बदल दो।

इस प्रकार F पर $\frac{2a}{3}+\frac{4b}{3}$ का अनुपातीय और E पर $\frac{4a}{3}+\frac{2b}{3}$ का अनुपातीय भार हो जायेगा।

अतः इष्ट गुरुत्व-केन्द्र G सरल रेखा EF पर इस प्रकार है कि

$$\frac{EG}{GF}=\frac{F \text{ पर भार}}{E \text{ पर भार}}=\frac{a+2b}{2a+b}.$$

उदाहरणमाला १६

१। एक त्रिभुजीय मेज अपने शीर्षों पर लगे पायों पर खड़ी है। 6, 8, और 10 पौ० के भार उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं पर रखे हैं। बताओ इन भारों से उसके पायों पर कितना दबाव बढ़ जायगा।

२। एक पतले सम तार के टुकड़े को $ABCD$ एक चतुर्भुज के रूप में मोड़ दिया गया है जिसकी AB और CD भुजायें समानान्तर हैं, और BC और DA, AB से बराबर कोण बनाती हैं। यदि $AB=18$ इंच, $CD=12$ इंच और BC और DA प्रत्येक $=5$ इंच हों, तो AB से तार के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

३। तीन बराबर बराबर सम दंड AB, BC और CD इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि वे एक सम षट्भुज की तीन क्रमागत भुजायें बनाते हैं और वे बिन्दु A से लटके हुये हैं; सिद्ध करो कि CD क्षैतिज है।

४। ABC एक सम तार का टुकड़ा है; उसके दोनों भाग AB और BC सीधे हैं और कोण $ABC=135°$। यह तार एक नियत बिन्दु से B पर बँधे हुये तागे से लटका हुआ है और उसका AB भाग क्षैतिज रहता है। सिद्ध करो कि $BC : AB :: \sqrt{2} : 1$.

५। एक दंड, जिसकी लम्बाई $5a$ है, इस प्रकार मुड़ा हुआ है कि वह एक सम षट्भुज की पाँच भुजायें बनाता है; सिद्ध करो कि उसके किसी सिरे से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{a}{10}\sqrt{133}$ है।

६। एक सम समलम्बीय पटल $ABCD$ की भुजा CD, AB से जो उसके सम्मुख और समानान्तर है दुगनी है। $ABCD$ के गुरुत्व-केन्द्र की AB और CD से दूरियों की तुलना करो।

७। यदि चतुर्भुजीय पटल $ABCD$ का गुरुत्व-केन्द्र उसके एक शीर्ष A पर हो, तो सिद्ध करो कि BD से A और C की दूरियाँ $1:2$ की निष्पत्ति में हैं।

करो कि समतुलित अवस्था में उसका आधार और अक्ष ऊर्ध्वाधर से बराबर बराबर झुके होंगे।

२२। एक ही धातु के दो सम शंकु, जिनकी तिरछी ऊँचाइयाँ बराबर हैं और जिनके शीर्ष कोण क्रम से 60° और 120° हैं, इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनकी एक तिरछी भुजा एक दूसरे पर पड़ती है। सिद्ध करो कि यदि वे उभयनिष्ठ शीर्ष से लटकाये जायँ, तो उनकी स्पर्शी ऊर्ध्वाधर से 15° का कोण बनायगी।

२३। कागज के एक त्रिभुजीय टुकड़े का शीर्ष त्रिभुज की दो भुजाओं को समविभाजित करनेवाली रेखा पर मोड़ कर आधार पर रख दिया जाता है। सिद्ध करो कि इस अवस्था में त्रिभुज के आधार से कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी उसी रेखा से बिना मोड़े हुये कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी की तीन-चौथाई है।

२४। एक कड़े कागज़ का आयताकार टुकड़ा, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई में $\sqrt{2}:1$ की निष्पत्ति है, एक क्षैतिज मेज़ पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी बड़ी भुजायें मेज़ के किनारे पर लम्ब हैं और उससे बाहर निकली हुई हैं। मेज़ पर रखे हुये उसके कोणों को इस प्रकार दोहरा कर दिया गया है कि कोरे कोनों को मिलानेवाली रेखा के मध्य-बिन्दु में होकर जाती हैं और उससे 45° का कोण बनाती हैं। अब कागज़ ठीक गिरने की अवस्था में हो जाता है; सिद्ध करो कि मौलिक अवस्था में उसकी लम्बाई का $\frac{25}{48}$ वाँ भाग मेज़ पर था।

२५। एक n भुजाओं के सम बहुभुज के $(n-1)$ शीर्षों में से प्रत्येक पर एक कण रखा हुआ है। सब कण बराबर हैं। सिद्ध करो कि बहुभुज के परिवृत्त के केन्द्र से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{r}{n-1}$ है, जहाँ पर r वृत्त की त्रिज्या है।

२६। एक वृत्तीय पटल में से एक वर्ग छेद काट दिया गया है। वर्ग

१४। उस शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जिसके आधार को सम्मिलित करके सम्पूर्ण पृष्ट का गुरूत्व-केन्द्र उसके आयतन के गुरूत्व-केन्द्र पर हो।

१५। एक बेलन और एक शंकु के आधार, जो विस्तार में बराबर है, जुड़े हुये हैं; शंकु और बेलन की ऊँचाइयों में निष्पत्ति मालूम करो यदि दोनों के सम्मिलित पिंड का गुरूत्व-केन्द्र उनके उभयनिष्ट आधार के केन्द्र पर हैं।

१६। बताओ एक सम बेलन से एक शंकु, जिसका और बेलन का आधार से एक ही हैं, किस प्रकार काटा जाय कि शेष पिंड का गुरूत्व-केन्द्र शंकु के शीर्ष पर हो।

१७। यदि किसी शंकु के आधार के व्यास और उसकी ऊँचाई में $1:\sqrt{2}$ की निष्पत्ति हो, तो सिद्ध करो कि यदि उसमें से बड़े से बड़ा गोला काट लिया जाय तो शेष पिंड का गुरूत्व-केन्द्र शंकु के गुरूत्व-केन्द्र पर पड़ेगा।

१८। एक सम शंकु में से जिसका शीर्ष कोण 60° है, बड़े से बड़ा गोला काट लिया गया है, सिद्ध करो कि शेष पिंड का गुरूत्व-केन्द्र अक्ष को 11 . 49 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१९। एक ठोस सम-वृत्तीय शंकु के आधार को इस प्रकार खोखला किया गया है कि खोखला भाग उसी आधार पर मौलिक शंकु की आधी ऊँचाई का एक समवृत्तीय शंकु बन जाता है; शेष पिंड के गुरूत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

२०। एक सम समत्रिबाहु त्रिभुज ABC इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका शीर्ष A एक चिकनी दीवार पर BD डोरी से लटका हुआ है। डोरी की लम्बाई त्रिभुज की भुजा के बराबर है और वह A के ऊर्ध्वाधर ऊपर एक बिन्दु D पर बँधी हुई है। सिद्ध करो कि दीवार से B और C की दूरियाँ 1:5 की निष्पत्ति में हैं।

२१। एक शंकु, जिसकी ऊँचाई उसके आधार की त्रिज्या की चार गुनी है, अपने आधार की परिधि के एक बिन्दु से लटका हुआ है; सिद्ध

करो कि समतुलित अवस्था में उसका आधार और अक्ष ऊर्ध्वाधर से बराबर बराबर झुके होंगें।

२२। एक ही धातु के दो सम शंकु, जिनकी तिरछी ऊँचाइयाँ बराबर हैं और जिनके शीर्ष कोण क्रम से 60° और 120° हैं, इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनकी एक तिरछी भुजा एक दूसरे पर पड़ती है। सिद्ध करो कि यदि वे उभयनिष्ठ शीर्ष से लटकाये जायँ, तो उनकी स्पर्शी ऊर्ध्वाधर से 15° का कोण बनायगी।

२३। कागज के एक त्रिभुजीय टुकड़े का शीर्ष त्रिभुज की दो भुजाओं को समविभाजित करनेवाली रेखा पर मोड कर आधार पर रख दिया जाता है। सिद्ध करो कि इस अवस्था में त्रिभुज के आधार से कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी उसी रेखा से बिना मोड़े हुये कागज के जड़त्व-केन्द्र की दूरी की तीन-चौथाई है।

२४। एक कड़े कागज का आयताकार टुकड़ा, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई में $\sqrt{2}:1$ की निष्पत्ति है, एक क्षैतिज मेज पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी बड़ी भुजायें मेज के किनारे पर लम्ब हैं और उससे बाहर निकली हुई हैं। मेज पर रखे हुये उसके कोणों को इस प्रकार दोहरा कर दिया गया है कि कोरे कोनों को मिलानेवाली रेखा के मध्य-विन्दु से होकर जाती है और उससे 45° का कोण बनाती है। अब कागज ठीक गिरने की अवस्था में हो जाता है; सिद्ध करो कि मौलिक अवस्था मे उसकी लम्बाई का $\frac{25}{48}$ वां भाग मेज पर था।

२५। एक n भुजाओं के सम बहुभुज के $(n-1)$ शीर्षों में से प्रत्येक पर एक कण रखा हुआ है। सब कण बराबर हैं। सिद्ध करो कि बहुभुज के परिवृत्त के केन्द्र से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{r}{n-1}$ है, जहाँ पर r वृत्त की त्रिज्या है।

२६। एक वृत्तीय पटल में से एक वर्ग छेद काट दिया गया है। वर्ग

१४। उस शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जिसके आधार को सम्मिलित करके सम्पूर्ण पृष्ट का गुरुत्व-केन्द्र उसके आयतन के गुरुत्व-केन्द्र पर हो।

१५। एक बेलन और एक शंकु के आधार, जो विस्तार में बराबर हैं, जुड़े हुये हैं; शंकु और बेलन की ऊँचाइयों में निष्पत्ति मालूम करो यदि दोनों के सम्मिलित पिंड का गुरुत्व-केन्द्र उनके उभयनिष्ट आधार के केन्द्र पर हैं।

१६। बताओ एक सम बेलन मे एक शंकु, जिसका और बेलन का आधार से एक ही है, किस प्रकार काटा जाय कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के शीर्ष पर हो।

१७। यदि किसी शंकु के आधार के व्यास और उसकी ऊँचाई में $1:\sqrt{2}$ की निष्पत्ति हो, तो सिद्ध करो कि यदि उसमें से बड़े से बड़ा गोला काट लिया जाय तो शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र शंकु के गुरुत्व-केन्द्र पर पड़ेगा।

१८। एक सम शंकु में से जिसका शीर्ष कोण 60° है, बड़े से बड़ा गोला काट लिया गया है; सिद्ध करो कि शेष पिंड का गुरुत्व-केन्द्र अक्ष को $11 \cdot 49$ की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१९। एक ठोस सम-वृत्तीय शंकु के आधार को इस प्रकार खोखला किया गया है कि खोखला भाग उसी आधार पर मौलिक शंकु की आधी ऊँचाई का एक समवृत्तीय शंकु बन जाता है; शेष पिंड के गुरुत्व-केन्द्र का स्थान मालूम करो।

२०। एक सम समद्विबाहु त्रिभुज ABC इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका शीर्ष A एक चिकनी दीवार पर BD डोरी से लटका हुआ है। डोरी की लम्बाई त्रिभुज की भुजा के बराबर है और वह A के ऊर्ध्वाधर ऊपर एक बिन्दु D पर बँधी हुई है। सिद्ध करो कि दीवार से B और C की दूरियाँ $1:5$ की निष्पत्ति में हैं।

२१। एक शंकु, जिसकी ऊँचाई उसके आधार की त्रिज्या की चार गुनी है, अपने आधार की परिधि के एक बिन्दु से लटका हुआ है; सिद्ध

२०। यदि दो मात्राओं m और n के स्थान A और B और उनका गुरुत्व-केन्द्र G है, तो सिद्ध करो कि यदि P कोई बिन्दु है,

$$m.AP^2+n.BP^2=m.AG^2+n.BG^2+(m+n)PG^2.$$

इसी प्रकार यदि $A, B, C,..$ बिन्दुओं पर मात्रायें $m, n, p,.$ हों, और G उनका गुरुत्व-केन्द्र हो, तो सिद्ध करो कि

$$m\,AP^2+n.BP^2+p.CP^2+....$$
$$=m.AG^2+n.BG^2+pCG^2+...+(m+n+p+...)PG^2.$$

का विसर्ग वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। सिद्ध करो कि शेष के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी वृत्त के केन्द्र से $\frac{a}{8\pi-4}$ है, जहाँ पर a वृत्त का व्यास है।

२७। एक समत्रिभुजीय बोर्ड में से अन्तः-वृत्त के क्षेत्रफल का भाग काट दिया गया है, सिद्ध करो कि शेष के गुरुत्व-केन्द्र की a दूरी से भुजा $\frac{S}{3as}\cdot\frac{2s^3-3\pi aS}{s^2-\pi S}$ है, जहाँ पर S बोर्ड का क्षेत्रफल और s उसकी अर्द्धपरिमाप है।

२८। एक सम वृत्तीय प्लेट में से दिये हुये विस्तार का एक वृत्तीय छेद काट दिया गया है, सिद्ध करो कि शेष का गुरुत्व-केन्द्र किसी वृत्त के भीतर होगा।

२९। किसी चतुर्भुजीय पटल के शीर्षों और उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरियाँ उसके धरातल की किसी रेखा से a, b, c, d, और e हैं; सिद्ध करो कि उस रेखा से जड़त्व-केन्द्र की दूरी $\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$ होगी।

मान लो A, B, C, D शीर्ष हैं, और E विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

तो $$\frac{\triangle ACD}{\triangle ACB}=\frac{D \text{ से } AC \text{ पर लम्ब}}{B \text{ से } AC \text{ पर लम्ब}}=\frac{DE}{EB}=\frac{d-e}{e-b}.$$

धारा १०४ और १११ से OX से $\triangle ACD$ के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{a+c+d}{3}$ और $\triangle ACB$ के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{a+c+b}{3}$ है।

अतः OX से इष्ट गुरुत्व-केन्द्र की दूरी

$$=\frac{\triangle ACD\times\frac{1}{3}(a+c+d)+\triangle ACB\times\frac{1}{3}(a+b+c)}{\triangle ACD+\triangle ACB}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{(d-e)(a+c+de-b)(a \quad +b+c)}{(d-e)+(e- \quad b)}.$$

$$=\frac{1}{3}(a+b+c+d-e), \text{ सक्षिप्त करने पर।}$$

३०। यदि दो मात्राओं m और n के स्थान A और B और उनका गुरुत्व-केन्द्र G हैं, तो सिद्ध करो कि यदि P कोई बिन्दु है,

$$m.AP^2+n.BP^2=m.AG^2+n.BG^2+(m+n)PG^2.$$

इसी प्रकार यदि $A, B, C,$ ..बिन्दुओं पर मात्रायें $m, n, p,$. हों, और G उनका गुरुत्व-केन्द्र हो, तो सिद्ध करो कि

$$m.AP^2+n.BP^2+p.CP^2+\ldots$$
$$=m.AG^2+n.BG^2+pCG^2+\ldots+(m+n+p+\ldots)PG^2.$$

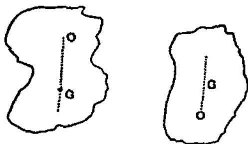
अध्याय १०

गुरुत्व-केन्द्र (क्रमशः)

(Centre of Gravity—Continued)

११९—यदि कोई दृढ़ पिंड समतुलित अवस्था में है जब कि उसका एक बिन्दु नियत है, तो पिंड का गुरुत्व-केन्द्र नियत बिन्दु से होकर जाती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा में होगा।

मान लो O पिंड का नियत विन्दु है, और G उसका गुरुत्व-केन्द्र है।



पिंड पर कार्य करते हुये बल पिंड के नियत आलम्बन-बिन्दु पर प्रतिबल और पिंड के अवयव भागों के भार हैं।

इन अवयव भागों के भार पिंड के गुरुत्व-केन्द्र से होकर जानेवाले एक मात्र ऊर्ध्वाधर बल के बराबर हैं।

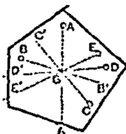
जब दो बल किसी पिंड को समतुलित अवस्था में रखते हैं तो वे बराबर और विपरीत होते हैं और उनकी क्रिया-रेखा एक ही होती है। परन्तु क्रिया-रेखायें एक नहीं हो सकतीं जबतक कि G से होकर जानेवाली ऊर्ध्वाधर रेखा O से होकर न जाय।

इसमें दो स्थितियाँ हो सकती हैं; पहली, जब गुरुत्व-केन्द्र G नियत बिन्दु O के ठीक नीचे हो, और दूसरी जब G, O के ठीक ऊपर हो।

पहली दशा में, यदि पिंड को समतुलित अवस्था से थोड़ा हटा दिया जाय तो पिंड में फिर अपनी समतुलित अवस्था में लौट आने की प्रवृत्ति होती है; दूसरी दशा में पिंड में अपनी समतुलित अवस्था में लौट आने की प्रवृत्ति नहीं होती।

१२०—किसी भी रूप के पिंड का गुरुत्व-केन्द्र प्रयोग द्वारा मालूम करना।

किसी रूप के कार्डबोर्ड का एक चौरस टुकड़ा लो। उसमें कुछ इतने छोटे छोटे छेद $A, B, C, D,$ करो जिनमें होकर एक छोटी पिन बेरोक जा सके।



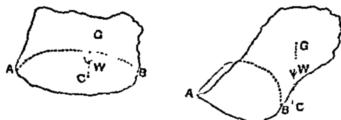
कार्डबोर्ड को A छेद से लटकाओ और उसे स्वतंत्रतापूर्वक लटकने दो जबतक कि वह समतुलित अवस्था में न आ जाय। कार्डबोर्ड पर रेखा AA' खींच दो जो ऊर्ध्वाधर हो। यह पिन से एक तागा, जिसके दूसरे सिरे पर सीसे की एक छोटी गुनिया बँधी हो लटका कर किया जा सकता है जब पहले तागे में खूब खड़िया (चाक) मल दी गई हो। यदि अब तागे को कार्डबोर्ड पर ठोका जाय तो उस पर खड़िये की एक रेखा रह जायगी जो AA' है। अब कार्डबोर्ड को छेद B पर पिन लगा कर लटकाओ, और इसी प्रकार रेखा BB' खींचो। यह भी ऊर्ध्वाधर होगी।

इस प्रयोग को बिन्दु C, D, E लेकर करो जिनसे होकर पिन जा सके और इस प्रकार ऊर्ध्वाधर रेखायें CC', DD', EE' मालूम करो।

यह खड़िया से खींची गई सब रेखायें AA', BB', CC', DD', EE' एक ही बिन्दु G से होकर जायेंगी। यदि कार्डबोर्ड की मोटाई को छोड़ दें तो यह बिन्दु G ही उसका गुरुत्व-केन्द्र होगा। यदि अब पिन को G से होकर रखें तो मालूम होगा कि कार्डबोर्ड किसी भी अवस्था में रखने पर समतुलित रहेगा।

१२१—यदि कोई पिंड अपने आधार पर जो एक चैतिज धरातल को स्पर्श करता है रखा जाय, तो वह खड़ा रहेगा यदि उसके गुरुत्व-केन्द्र से होकर खींची गई उर्ध्वाधर रेखा धरातल को आधार के भीतर मिले और गिर जायेगा यदि वह बाहर मिले।

पिंड पर कार्य करते हुये बल उसका भार है जो उसके गुरुत्व-केन्द्र G पर कार्य करता है, और धरातल के प्रतिबल हैं जो पिंड के



आधार के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर कार्य करते हैं। यह सब प्रतिबल ऊर्ध्वाधर हैं इसलिये यह आधार के किसी बिन्दु पर कार्य करते हुये एक-मात्र ऊर्ध्वाधर बल मे संयोजित किये जा सकते हैं।

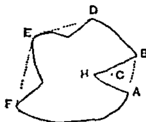
क्योंकि दो सम समानान्तर बलों का परिणामीबल बलों के बीच के किसी बिन्दु पर कार्य करता है अतएव पिंड के आधार पर सब प्रतिबलों का परिणामीबल आधार के बाहर किसी बिन्दु पर कार्य नहीं कर सकता है।

अत यदि पिंड के गुरुत्व-केन्द्र से होकर खींची हुई ऊर्ध्वाधर रेखा धरातल के आधार के बाहर किसी बिन्दु पर मिले, तो वह परिणामी-प्रतिबल से सन्तुलित नहीं हो सकती और पिंड सन्तुलित अवस्था में नहीं रह सकता अतः वह गिर जायगा।

यदि पिंड का आधार एक ऐसा चित्र है जिसका एक कोण अन्तःप्रविष्ट है, जैसा कि नीचे के चित्र में दिखलाया गया है, तो हमें प्रतिज्ञा के शब्द "आधार" के अर्थ को बढ़ा कर उस क्षेत्रफल का लेना चाहिये जो ज्यामितीय आधार के चारों ओर एक तागे को खींच कर बांधने से

आता है। ऊपर के चित्र में "आधार" से तात्पर्य क्षेत्रफल $ABDEFA$ से है।

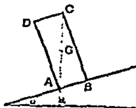
जैसे, विन्दु C, जिसपर परिणामी-प्रतिबल कार्य करता है, क्षेत्र AHB के



भीतर हो सकता है, परन्तु वह विन्दुमय रेखा AB के बाहर नहीं हो सकता।

यदि विन्दु C रेखा AB पर A और B के बीच में हो, तो पिंड गिरने की सीमा पर होगा।

उदाहरण। एक बेलन, जिसकी ऊँचाई h है और जिसके आधार की त्रिज्या r है, एक आनत तल पर रखा हुआ है और सरकने से रुका हुआ है; यदि धरातल का झुकाव धीरे धीरे बढ़ाया जाय तो बताओ बेलन कब गिर पड़ेगा।



मान लो कि बगल का चित्र बेलन के परिच्छेद को उस समय प्रदर्शित करता है जब वह गिरने की सीमा पर है, इसलिये पिंड के गुरुत्व-केन्द्र G से होकर खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा ठीक आधार के सिरे A से होकर जायगी। अतः कोण CAD धरातल के झुकाव α के बराबर होगा।

$$\text{अतः} \quad \frac{h}{2r} = \frac{CB}{AB} = \text{स्पर्ज्या}\, CAB = \text{कोस्पर्ज्या}\, \alpha\,;$$

$$\therefore \quad \text{स्पर्ज्या}\, \alpha = \frac{2r}{h},$$

जिससे धरातल का इष्ट झुकाव मालूम हो जाता है।

स्थायी, अस्थायी, तथा उदासीन संस्थिति

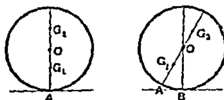
१२२—धारा ११९ में हम बता चुके हैं कि धारा के पहले चित्र में यदि पिंड तनिक सा हटा दिया जाय तो वह फिर समतुलित स्थिति में लौट आयगा, परन्तु दूसरे चित्र में पिंड फिर मौलिक स्थिति में नहीं लौटेगा परन्तु उस स्थिति से और अधिक दूर हो जायगा।

ये दो पिंड क्रम से स्थायी और अस्थायी संस्थिति में कहे जाते हैं।

अब यदि एक शंकु, जिसका चौरस वृत्तीय आधार किसी क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, थोड़ा सा हटा दिया जाय तो वह अपनी समतुलित स्थिति में फिर लौट आयगा; परन्तु यदि वह धरातल पर अपने शीर्ष के बल रखा हुआ हो और उसे तनिक सा हटा दिया जाय तो वह अपनी समतुलित स्थिति से और भी अधिक दूर हो जायगा; परन्तु यदि वह अपनी तिरछी भुजा को धरातल पर स्पर्श करते हुये रखा हुआ हो तो वह हर एक स्थिति में समतुलित रहेगा। इस अन्तिम अवस्था में वह उदासीन संस्थिति में कहा जाता है।

१२३—अब एक भारी गोले पर विचार करो जो एक क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र पर नहीं है।

मान लो पहला चित्र समतुलन की वह स्थिति प्रदर्शित करता है जिसमें गुरुत्व-केन्द्र या तो केन्द्र O के नीचे है, जैसे G_1 या ऊपर है,



जैसे G_2। मान लो दूसरा चित्र गोले की उस स्थिति को प्रदर्शित करता है जब वह एक छोटे से कोण पर घुमा दिया जाता है और तब B उसका धरातल से स्पर्श-बिन्दु हो जाता है।

धरातल का प्रतिबल अब भी गोले के केन्द्र से होकर कार्य करता है।

यदि पिंड का भार G_1 से कार्य करे तो स्पष्ट है कि पिंड अपनी समतुलन की स्थिति में आ जायगा और इसलिये पिंड आरम्भ में स्थायी संस्थिति में था।

यदि भार G_2 से कार्य करे तो पिंड समतुलन की अपनी मौलिक स्थिति से और भी अधिक दूर हट जायगा और इसलिये वह आरम्भ में अस्थायी संस्थिति में था।

परन्तु यदि पिंड का गुरुत्व-केन्द्र O पर है तो दूसरे चित्र की स्थिति में उसका भार धरातल के प्रतिबल से फिर भी समतुलित होगा, इसलिये पिंड नई स्थिति में ही रहेगा और स्थिति उदासीन संस्थिति कहलायगी।

१२४--परिभाषा। एक पिंड **स्थायी** संस्थिति में तब कहलाता है कि, यदि उसे तनिक सा समतुलित स्थिति से हटा दिया जाय, तो उस जब पर कार्य करते हुये बल उसे फिर समतुलित स्थिति में लौटा लायें; और वह **अस्थायी** संस्थिति में तब कहलाता है जबकि, यदि उसे तनिक सा हटा दिया जाय तो उस पर कार्य करते हुये बल उसे समतुलित स्थिति से और भी अधिक हटा दें; वह **उदासीन** संस्थिति में कहलाता है यदि हटी हुई स्थिति में उस पर कार्य करते हुये बल समतुलित हों।

प्रायः वे पिंड जिनके शीर्ष भारी होते हैं, अथवा जिनके आधार छोटे होते हैं, अस्थायी होते हैं।

इस प्रकार सैद्धान्तिक रूप से एक पिन क्षैतिज मेज पर अपनी नोक पर इस प्रकार सीधी खड़ी की जा सकती है कि वह समतुलित अवस्था में रहे, परन्तु व्यावहारिक रूप से उसका आधार इतना छोटा होगा कि थोड़ा सा हटाने से ही उसके गुरुत्व-केन्द्र से खींचा हुआ ऊर्ध्वाधर उसके आधार के बाहर हो जायगा और वह गिर जायगी। यही बात बिलियर्ड के उस डंडे के लिये भी सही है जो मेज पर अपने सिरे के ऊपर ऊर्ध्वाधर अवस्था में खड़ा किया जाता है।

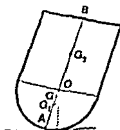
साधारण रूप से एक पिंड स्थायी संस्थिति में होता है जब उसका

गुरुत्व-केन्द्र उस सबसे नीचे स्थान में हो जो वह ले सकता है; इसके उदाहरण पिछली धारा में दिये गये हैं, और एक उदाहरण घड़ी का पेन्डुलम भी है, जो हिलाने पर फिर समतुलित अवस्था में लौट आता है।

अब उस आदमी पर विचार करो जो एक तनी हुई रस्सी पर चलता है। वह एक डंडा लिये रहता है जो एक सिरे पर भारी होता है, ताकि उसका और डंडे का गुरुत्व-केन्द्र उसके पैरों के नीचे रहे। जब उसे ऐसा मालूम होता है कि वह एक ओर गिर रहा है तो वह डंडे का स्थान इस प्रकार बदल देता है कि गुरुत्व-केन्द्र उसके पैरों के दूसरी ओर आ जाय, और तब परिणामी भार उसे फिर सीधी अवस्था में खींच लेता है।

यदि किसी पिंड की एक से अधिक सैद्धान्तिक समतुलित स्थितियाँ हों, तो व्यापक रूप से वह स्थिति जिसमें उसका गुरुत्व-केन्द्र सबसे नीचा होता है स्थायी संस्थिति होगी और वह स्थिति जिसमें गुरुत्व-केन्द्र सबसे ऊँचा होता है अस्थायी संस्थिति होगी।

१२५—उदाहरण। एक बेलन और उसके आधार पर जुड़े हुये अर्द्ध-गोले से बना हुआ एक समांगिक पिंड एक क्षैतिज मेज पर अपने अर्द्ध-गोलीय सिरे पर रखा हुआ है, तो बताओ संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी?



मान लो कि G_1 और G_2 अर्द्ध-गोले और बेलन के गुरुत्व-केन्द्र हैं, A पिंड का वह बिन्दु है जहाँ पर वह मेज को स्पर्श करता है, और O अर्द्ध-गोले के आधार का केन्द्र है।

मान लो h बेलन की ऊँचाई है और r आधार की त्रिज्या है, तो

$$OG_1 = \frac{3}{8} r, \text{ और } OG_2 = \frac{h}{2} \text{ (धारा ११३)}.$$

अर्द्ध-गोले और बेलन के भार क्रमसे $\frac{2}{3}\pi r^3$ और $\pi r^2 h$ की निष्पत्ति में हैं।

हटी हुई स्थिति में धरातल का प्रतिबल हमेशा केन्द्र O से जायगा।

अतः संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी होगी यदि मिश्रित पिंड का गुरुत्व-केन्द्र G, O के नीचे अथवा ऊपर हो,

अर्थात् यदि $OG_1 \times$ अर्द्ध गोले का भार $\gtrless OG_2 \times$ बेलन का भार,

अर्थात्, यदि $\frac{3}{8} r \times \frac{2}{3} \pi r^3 \gtrless \frac{h}{2} \times \pi r^2 h$,

अर्थात्, यदि $\frac{r^2}{2} \gtrless h^2$,

अर्थात्, यदि $r \gtrless \sqrt{2}. h$,

अर्थात् $\gtrless h \times 1.42. ...$

१२६*—इस पुस्तक में हम एक पिंड की दूसरे पिंड के ऊपर संस्थिति की व्यापक व्याख्या पर विचार नहीं कर सकते हैं। अगली धारा में हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जब दोनों पिंडों के स्पर्श करते हुये भाग गोलीय हों।

एक पिंड एक दूसरे नियत पिंड पर समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। दोनों पिंडों के स्पर्श करते हुये भाग गोलीय हैं जिनकी त्रिज्यायें क्रमसे r और R हैं; यदि पहले पिंड को थोड़ा सा हटा दिया जाय तो बताओ संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी, जब पिंड इतने रूक्ष हैं कि फिसल नहीं पाते।

मान लो नीचे के पिंड के गोलीय धरातल का केन्द्र O है और ऊपर के पिंड का O_1 है; क्योंकि पिंड समतुलित अवस्था में हैं इसलिये ऊपर

के पिंड का गुरूत्व-केन्द्र G_1 रेखा OO_1 में ही होगा जो पिंडों के स्पर्श-बिन्दु A से होकर जाती है।

मान लो $A_1G_1=h$.

मान लो ऊपर के पिंड को थोड़ा सा लुढका कर इस प्रकार हटा दिया जाता है कि परिवर्तित स्थिति मे ऊपर के पिंड का केन्द्र O_2 है, स्पर्श-बिन्दु A_2 है, गुरूत्व-केन्द्र का नया स्थान G_2 है और A_1 का स्थान C है। अत: $CG_2=h$.

A_2 मे ऊर्ध्वाधर रेखा A_2L खीचो जो O_2C को L मे मिलती है, और O_2M को ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर खीचो कि वह A_2 से खींची हुई क्षैतिज रेखा को M पर मिले।

मान लो कोण $A_2OA_1=\theta$, और $A_2O_2C=\phi$, इसलिये कोण $CO_2M=(\theta+\phi)$.

क्योंकि ऊपर का पिंड लुढक कर नये स्थान में आया है, इसलिये चाप A_1A_2=चाप CA_2.

*अत (वैश्लेषिक त्रिकोणमिति, धारा १५८)

$$R.\theta=r.\phi \quad \ldots \quad (१),$$

जहां r और R क्रम मे ऊपर और नीचे के पिंडों की त्रिज्यायें हैं।

संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी होगी, यदि G_2 रेखा A_2L के बाईं अथवा दाईं ओर हो,

अर्थात्, यदि O_2M मे G_2 की दूरी $>$ अथवा $<O_2M$ मे L की दूरी, अर्थात् A_2M,

अर्थात्, यदि O_2G_2 ज्या $(\theta+\phi) >$ अथवा $<O_2A_2$ ज्या θ,

अर्थात्, यदि $(r-h)$ ज्या $(\theta+\phi) >$ अथवा $<r$ ज्या θ,

अर्थात्, यदि $\frac{r-h}{r} >$ अथवा $< \frac{\text{ज्या } \theta}{\text{ज्या } (\theta+\phi)}$.

परन्तु $\frac{\text{ज्या}\,\theta}{\text{ज्या}\,(\theta+\phi)}=\frac{\theta}{\theta+\phi}$,

क्योंकि θ और ϕ दोनों बहुत छोटे हैं,

$$=\frac{r}{r+R}, \text{ समीकरण (१) में}$$

अतः संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी है, यदि

$$\frac{r-h}{r} > \text{अथवा} < \frac{r}{r+R},$$

अर्थात्, यदि $r-\frac{r^2}{r+R} >$ अथवा $<h$,

अर्थात्, यदि $\frac{Rr}{r+R} >$ अथवा $<h$,

अर्थात्, यदि $\frac{1}{h} >$ अथवा $<\frac{1}{r}+\frac{1}{R}$.

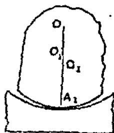
अतः, यदि $\frac{1}{h}=\frac{1}{r}+\frac{1}{R}$, तो संस्थिति कभी कभी उदासीन कही जाती है। यह वास्तव में अस्थायी है, परन्तु इसका अन्वेषण इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

अतः संस्थिति केवल उसी दशा में स्थायी है जबकि

$$\frac{1}{h}>\frac{1}{r}+\frac{1}{R},$$

अन्यथा वह अस्थायी होगी।

उपसाध्य १। यदि नीचे के पिंड का पृष्ठ उन्नतोदर होने की जगह, जैसा कि पिछले पृष्ठ के चित्र में है, नतोदर हो जैसा कि अगले चित्र में है, तो भी यदि हम R का चिन्ह बदल दें ऊपर का अन्वेषण ठीक रहेगा।

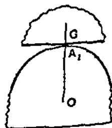


अतः संस्थिति स्थायी है जब

$$\frac{1}{h}>\frac{1}{r}-\frac{1}{R};$$

अन्यथा वह अस्थायी है।

उपसाध्य २। यदि ऊपर के पिंड का एक समतल फलक हो और वह नीचे के पिंड को स्पर्श करे, जैसा कि अगले चित्र में है, तो r का मूल्य अनन्त होगा और इसलिये $\frac{1}{r}$ शून्य होगा।



अत. संस्थिति स्थायी होगी यदि

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{R} \text{ अर्थात् } h < R.$$

अतः संस्थिति स्थायी होगी यदि ऊपर के पिंड के गुरुत्व-केन्द्र की उसके समतल फलक से दूरी नीचे के पिंड की त्रिज्या से कम हो, अन्यथा संस्थिति अस्थायी होगी।

उपसाध्य ३। यदि नीचे का पिंड एक धरातल हो, तो R अनन्त हो और संस्थिति स्थायी रहेगी यदि

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r}, \text{ अर्थात् यदि } h < r.$$

अतः यदि गोलीय आधार का कोई पिंड एक क्षैतिज मेज पर रखा हो, तो वह स्थायी संस्थिति में होगा यदि स्पर्श-बिन्दु से उसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी गोलीय पृष्ठ की त्रिज्या से कम हो।

उदाहरणमाला २०

१। बढ़ई का एक पैमाना, जो 2 फुट लम्बा है, दो भागों में जो एक दूसरे पर लम्ब है, मुड़ा हुआ है; छोटे भाग की लम्बाई 8 इंच है। यदि छोटा भाग एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रख दिया जाय, तो बताओ कि मेज पर सबसे छोटे भाग की क्या लम्बाई होगी कि वह समतुलित अवस्था में रह सके?

२। धातु के एक टुकड़े से बना हुआ एक बेलन, जिसका आयतन 18 घन इंच है, अपने आधार पर एक आनत तल पर, जिसका झुकाव 30° है, रखा हुआ है, और फिसलने से रुका हुआ है। बेलन कितना लम्बा बनाया जाय कि वह ठीक गिर न सके?

३। यदि एक त्रिभुजीय पटल ABC एक ऊर्ध्वाधर धरातल में ठीक इस प्रकार रखा जा सके कि उसका AB किनारा एक चिकनी मेज़ से स्पर्श करता हो, तो सिद्ध करो कि $BC^2 - AC^2 = 3AB^2$.

४। एक सम वर्ग प्लेट $ABCD$, जिसका भार W है, की भुजा CD, E पर समविभाजित है और त्रिभुज AED काट दिया गया है। प्लेट $ABCEA$ ऊर्ध्वाधर अवस्था में इस प्रकार रखी हुई है कि उसकी भुजा CD एक क्षैतिज धरातल पर रहती है। बताओ A पर बड़ा से बड़ा कौन सा भार रखा जाय कि प्लेट न उल्टे ?

५। ABC एक चौरस बोर्ड है, A समकोण है और AC एक चौरस मेज से स्पर्श करता है ; D, AC का मध्य-विन्दु है और त्रिभुज ABD काट दिया गया है ; सिद्ध करो कि त्रिभुज ठीक गिरने की सीमा पर है।

६। एक ईंट इस प्रकार रखी हुई है कि उसकी लम्बाई का एक-चौथाई भाग दीवार के किनारे से बाहर निकला हुआ है ; एक ईंट और एक और ईंट का चौथाई भाग पहली ईंट पर इस प्रकार रखा हुआ है कि एक ईंट का चौथाई भाग पहली ईंट के किनारे से बाहर निकला रहता है ; एक ईंट और एक ईंट का आधा इस पर रखा हुआ है ; इत्यादि , सिद्ध करो कि इस प्रकार ईंटों के चार रद्दे बिना मसाले की सहायता के समतुलित अवस्था में रहेंगे, परन्तु यदि पाँचवाँ रद्दा रखा जाय तो ढाँचा गिर जायगा।

७। एक ही विस्तार और व्यास की $\frac{1}{20}$ वीं मोटाई के कितने सिक्के एक आनत तल पर, जिसकी ऊँचाई आधार के एक छठवें भाग के बराबर है, बिना फिसले एक बेलनाकार ढेर में रखे जा सकते हैं ?

यदि प्रत्येक सिक्के का किनारा अपने नीचे के सिक्के के एक ओर बाहर निकला रहे, तो बताओ व्यास का कौनसा भाग प्रत्येक के बाहर निकला रहे कि अनन्त ऊँचाई का एक ढेर समतल पर खड़ा किया जा सके।

८। कुछ ईंटें, जिनमें से प्रत्येक 9 इंच लम्बी, 4 इंच चौड़ी और 3 इंच मोटी है एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखी हुई हैं कि उनके सबसे संकीर्ण पृष्ठ अथवा मोटाइयाँ एक ही ऊर्ध्वाधर धरातल में रहती हैं, प्रत्येक ईंट अपने नीचे की

ईंट से आधी इस बाहर को निकली रहती है; सबसे नीचे की ईंट मेज पर रखी हुई है, बताओ इस प्रकार बिना गिरे हुये कितनी ईंटें रखी जा सकती हैं?

९। ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका भार W है, और जिसका कोण $A=120^{\circ}$ और जिसकी भुजा AB एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखी हुई है, तथा त्रिभुज का धरातल ऊर्ध्वाधर है। यदि C पर एक भार $\frac{W}{3}$ लटका दिया जाय, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज ठीक गिरने की सीमा पर होगा।

१०। एक चतुर्भुजीय पटल $ABCD$ दो सम समद्विबाहु त्रिभुज ABC ADC से बना हुआ है, जिनके शीर्ष B और D उभयनिष्ठ आधार AC के विपरीत ओर हैं, तथा कोण ABC एक समकोण है। सिद्ध करो कि वह एक ऊर्ध्वाधर धरातल में समतुलित अवस्था में रहेगा यदि BC एक क्षैतिज धरातल पर हो और ADC का क्षेत्रफल, ABC के क्षेत्रफल के चौगुने से अधिक न हो।

११। एक पिंड एक ही आधार पर एक शंकु और एक अर्द्ध गोले से बना हुआ एक रूक्ष क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। अर्द्ध गोला मेज को स्पर्श करता है। शंकु की अधिक से अधिक ऊँचाई बताओ कि संस्थिति स्थायी हो।

१२। एक पिंड एक बेलन और एक अर्द्धगोले से बना हुआ है जिनके आधार बराबर हैं और एक दूसरे से जुड़े हुये हैं। बेलन की ऊँचाई की उसकी त्रिज्या से निष्पत्ति मालूम करो जबकि संस्थिति उदासीन हो। अर्द्धगोलीय पृष्ठ क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है।

१३। एक अर्द्ध-गोला बराबर त्रिज्या के एक अन्य गोले पर समतुलित स्थिति में रखा हुआ है, सिद्ध करो कि संस्थिति अस्थायी होगी यदि अर्द्ध-गोले का वक्र पृष्ठ गोले पर रखा हो और स्थायी होगी यदि उसका चौरस पृष्ठ रखा हो।

१४। एक भारी सम शंकु अपने आधार पर एक नियत रूक्ष गोले पर जिसकी त्रिज्या दी हुई है रखा हुआ है; शंकु की अधिक से अधिक ऊँचाई मालूम करो जबकि वह स्थायी संस्थिति में हो।

१५। एक सम छड़, जिसकी मोटाई $2b$ है, एक पूर्ण रूक्ष क्षैतिज बेलन पर जिसकी त्रिज्या a है, सममिति रूप से रखी हुई है ; सिद्ध करो कि छड़ की संस्थिति स्थायी अथवा अस्थायी होगी जब b, a से छोटा अथवा बड़ा है।

१६। एक भारी सम घन एक गोले के, जिसकी त्रिज्या r है, सबसे ऊँचे बिन्दु पर समतुलित स्थिति में रखा हुआ है। यदि गोला इतना रूक्ष हो कि घन फिसल न पावे, और यदि घन की भुजा $\frac{\pi r}{2}$ हो, तो सिद्ध करो कि घन बिना गिरे हुये ही एक समकोण झूल सकता है।

१७। समद्विबाहु त्रिभुज के रूप का एक पटल, जिसका शीर्ष कोण α है, एक गोले पर जिसकी त्रिज्या r है, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका धरातल ऊर्ध्वाधर है और उसकी बराबर भुजाओं में से एक गोले को स्पर्श करती है; सिद्ध करो कि यदि त्रिभुज अपने ही धरातल में थोडा सा हटा दिया जाय, तो संस्थिति स्थायी होगी यदि ज्या α, $\frac{3r}{a}$ से कम है, जहाँ a त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से एक है।

१८। एक भार W एक चिकने आनत तल पर एक दिये हुये भार P से रुका हुआ है ; भार P, W से एक डोरी द्वारा, जो एक नियत घिरनी जिसका स्थान दिया हुआ है के ऊपर से जाती है, बँधा हुआ है। धरातल पर W का स्थान मालूम करो, और बताओ कि संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी।

१९। एक रूक्ष सम वृत्तीय मंडल, जिसकी त्रिज्या r है और भार p है, केन्द्र से c दूरी पर, एक बिन्दु के चारों ओर घूम सकता है। एक डोरी जो इतनी रूक्ष है कि फिसल नहीं पाती, उसकी परिधि के ऊपर लटकी हुई है और उसके सिरों पर दो विषम भार W और w बँधे हुये हैं। समतुलन की स्थिति मालूम करो और बताओ कि संस्थिति स्थायी है अथवा अस्थायी।

२०। एक ठोस गोला एक नियत रूक्ष-गोलीय प्याले के भीतर रखा हुआ है। प्याले की त्रिज्या गोले की त्रिज्या की दुगनी है। सिद्ध करो कि गोले के सबसे ऊँचे विन्दु पर कितना ही बड़ा भार क्यों न लगा दिया जाय, संस्थिति स्थायी रहेगी।

२१। एक पतला अर्द्ध-गोलीय प्याला, जिसकी त्रिज्या b और भार W है, एक नियत गोले, जिसकी त्रिज्या a है, के सबसे ऊँचे विन्दु पर समतुलित स्थिति में रक्खा हुआ है; गोला इतना रूक्ष है कि फिसलने से रुका हुआ है। प्याले के भीतर w भार का एक दूसरा छोटा सा चिकना गोला रखा हुआ है। सिद्ध करो कि संस्थिति तबतक स्थायी नहीं हो सकती जबतक

$$w < W.\frac{a-b}{2b}.$$

अध्याय ११

कर्म

(Work)

१२७—कर्म। परिभाषा। बल कर्म करता हुआ कहा जाता है यदि उसका प्रयोग-बिन्दु अपने स्थान से बल की दिशा में हटे।

गाड़ी के खींचने में घोड़े द्वारा लगाया गया बल कर्म करता है।

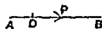
भार उठाने में आदमी द्वारा लगाया गया बल कर्म करता है।

इंजन के पिस्टन के चलाने में वाष्प द्वारा लगाया गया दबाव कर्म करता है।

जब कोई आदमी घड़ी में चाबी लगाता है तो वह कर्म करता है।

किसी बल द्वारा किये गये कर्म का नाप बल और उस दूरी का गुणनफल होता है जो उसका प्रयोग-बिन्दु बल की दिशा में हट जाता है।

मान लो एक बल किसी पिंड के बिन्दु A पर कार्य करके बिन्दु A को D तक हटा देता है, तो P से किया गया कर्म P और AD के गुणनफल से नापा जाता है।



यदि बिन्दु D, A के उस ओर हो जिस ओर बल कार्य करता है तो यह कर्म धन होता है; यदि D विपरीत ओर हो तो कर्म ऋण होता है।

मान लो बल का प्रयोग-बिन्दु एक ऐसे बिन्दु C पर हट जाता है जो AB रेखा पर नहीं है। AB अथवा आवश्यकतानुसार बढ़ाई हुई AB पर

CD लम्ब खीचों, तो AD वह दूरी है जो प्रयोग-विन्दु बल की दिशा में हट जाता है। अतः पहले चित्र में कर्म $P \times AD$ है ; दूसरे चित्र में कर्म $-P \times AD$





है। जब बल से किया गया कर्म ऋण होता है तो इसे यों कहते है कि बल ने अपने विपरीत कर्म किया है।

उस स्थिति में जब AC, AB पर लम्ब हो, तो बिन्दु A और D एक हो जाते है और बल P से किया गया कर्म शून्य हो जाता है।

उदाहरणार्थ, यदि किसी पिंड को क्षैतिज मेज पर हटाया जाय तो उसके भार द्वारा किया गया कर्म शून्य होता है। इसी प्रकार यदि किसी पिंड को आनत तल पर हटाया जाय तो धरातल का अभिलम्ब प्रतिबल कोई कर्म नहीं करता।

१२८—स्थिति विज्ञान में प्रयुक्त कर्म की इकाई को एक फुट-पौंड कहते है, और यह वह कर्म है जिसे एक पौंड भार का बल अपने प्रयोग-विन्दु को अपनी दिशा में एक फुट हटा कर करता है। फुट-पौंड से अधिक अच्छा, यद्यपि भद्दा शब्द फुट-पौंड-भार होगा।

इस प्रकार 10 पौ० के पिंड का भार पिंड के 4 फुट गिरने में 10×4 फुट-पौंड कर्म करता है।

यदि पिंड 10 फुट ऊर्ध्वाधर उठाया जाय तो उसका भार -10×4 फुट-पौंड कर्म करेगा।

१२९—यह देखा जा चुका है कि धारा १२७ में दी गई कर्म की परिभाषा में गति का होना अनिवार्य है। एक आदमी किसी पिंड के हटाने के प्रयत्न में अत्यधिक परिश्रम क्यों न करे परन्तु फिर भी यह सम्भव है कि वह पिंड पर कोई कर्म न कर सके।

जैसे, मान लो एक आदमी माल ढोने की भारी लदी हुई गाड़ी के धुरादंड को खींचता है जिसे वह हटा नहीं पाता है। वह उसे हटाने में

अपनी पूरी शक्ति का प्रयोग क्यों न करे, परन्तु चूंकि जो बल वह प्रयोग करता है, गाड़ी के प्रयोग-बिन्दु को हटा नहीं पाता है, अतः शब्द के पारिभाषिक अर्थ में वह कोई कर्म नहीं करता।

१३०—साध्य। सिद्ध करना कि कणों का एक स्थान से दूसरे स्थान के हटाने में Wh कर्म होता है, जहां पर W कणों के भारों का योग और h वह दूरी है जिससे होकर कणों का गुरुत्व-केन्द्र उठाया गया है।

मान लो $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ कणों के भार हैं, और आरम्भ में क्षैतिज धरातल से उनकी ऊँचाइयाँ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ हैं, और $\bar{x}$ उनके गुरुत्व-केन्द्र की ऊँचाई है, इसलिये, जैसा कि धारा १११ में,

$$\bar{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n} \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

मान लो कि अन्त में $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ कणों की ऊँचाइयाँ हैं, और $\bar{x}'$ नये गुरुत्व-केन्द्र की ऊँचाई है, इसलिये

$$\bar{x}'=\frac{w_1x_1'+w_2x'_2+\ldots+w_nx_n'}{w_1+w_2+\ldots+w_n} \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

परन्तु चूंकि $w_1+w_2+\ldots=W$, समीकरण (१) और (२) से

$$w_1x_1+w_2x_2+\ldots=W.\bar{x},$$

और $$w_1x_1'+w_2x_2'+\ldots=W.\bar{x}'.$$

घटाने पर $w_1(x_1'-x_1)+w_2(x_2'-x_2)+\ldots=W(\bar{x}'-\bar{x}).$

परन्तु इस समीकरण का बायाँ पक्ष भिन्न भिन्न कणों को उनके प्रारम्भिक स्थान से अन्तिम स्थान तक उठाने में कृत-कर्मों का योग है; और दायाँ पक्ष $=W\times$ वह ऊँचाई जिससे गुरुत्व-केन्द्र उठाया गया है $=W.h.$

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

१३१—*सामर्थ्य*। परिभाषा। कर्म के उस परिमाण को जो समय की इकाई में कोई समान रूप से कार्य करता हुआ करे, कर्ता की सामर्थ्य कहते हैं।

इंजीनियर सामर्थ्य की जिस इकाई का प्रयोग करते हैं वह अश्व-सामर्थ्य है। कोई कर्ता एक अश्व-सामर्थ्य से कर्म करता हुआ कहा जाता है जब वह एक मिनट में 33,000 फुट-पौंड कर्म करता है अर्थात् जब वह 33,000 पौं० भार को एक मिनट में एक फुट उठाता है, अर्थात् जब वह 330 पौं० भार को एक मिनट में 100 फ़ुट अथवा 33 पौं० भार को एक मिनट में 1000 फुट उठाता है।

एक घोड़े (अश्व) के सामर्थ्य का यह परिमाण वाट ने निकाला था, परन्तु यह साधारण घोडे की शक्ति के बाहर है। शब्द अश्व-सामर्थ्य प्राय: संक्षेप में अ० सा० (H. P.) लिखा जाता है।

१३२—यह स्मरण रहे कि धारा १३० का परिणाम किसी भी दशा में कणों की प्रारम्भिक अथवा अन्तिम सापेक्ष स्थित पर निर्भर नहीं होता। यह केवल उनके गुरुत्व-केन्द्र की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति पर ही निर्भर रहता है।

उदाहरणार्थ, मान लो पृथ्वी में एक गड्ढा खोदा जाय, मिट्टी उठाई जाय, और पृथ्वी के तल पर गड्ढे के शिखर पर फैला दी जाय। हमें केवल मिट्टी के गुरुत्व-केन्द्र की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति की ही आवश्यकता है, और तब कर्म ज्ञात हो जायगा। यह कर्म उस मार्ग के बिलकुल स्वतंत्र है जिससे मिट्टी अपनी प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति में ले जाई गई है।

उदाहरण। एक कुआँ, जिसका परिच्छेद एक वर्ग है जिसकी भुजा 4 फुट है, 300 फुट गहरा है और पानी से भरा हुआ है; पानी को कुएँ से उसके शिखर के तल तक पम्प करने में जो कर्म किया जायगा उसे फ़ुट-पौंड में मालूम करो।

उस इंजन की अश्वसामर्थ्य भी मालूम करो जो इस कर्म को एक घन्टे में कर लेता है।

[टिप्पणी—पानी के एक घन फ़ुट का भार 1000 औंस होता है।]

आरम्भ में पानी के गुरुत्व-केन्द्र की कुँये की तह से ऊँचाई 150 फ़ुट है और अन्त में वह 300 फुट है, इस प्रकार जिस ऊँचाई में होकर उसका गुरुत्व-केन्द्र उठा है वह 150 फ़ुट है।

पानी का घनफल $4 \times 4 \times 300$ घन फ़ुट है।

इसलिये उसका भार $= 4 \times 4 \times 300 \times \frac{1000}{16}$ पौ० $= 300{,}000$ पौं०।

अतः कृत-कर्म $= 300{,}000 \times 150$ फुट–पौ० $= 45{,}000{,}000$ फुट–पौं०।

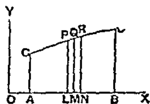
यदि x इष्ट अश्वसामर्थ्य है, तो इंजन ने एक घंटे में $x \times 60 \times 33{,}000$ कर्म किया है।

अतः $x \times 60 \times 33{,}000 = 45{,}000{,}000;$

$$\therefore\ x = 22\tfrac{8}{11}.$$

१३३—बल द्वारा किये हुये कर्म का लेखा-चित्रीय प्रतिदर्शन।

कभी कभी चर बल द्वारा किये गये कर्म की सीधी साधी गणना करना कठिन होता है, परन्तु परिमाण को लगभग शुद्ध निकालना बिलकुल सम्भव होता है।



मान लो बल हमेशा उसी सरल रेखा OX में कार्य करता है, और मान लो प्रयोग-बिन्दु A से B को हट जाने पर हमें कृत-कर्म निकालना है। A और B पर AC और DB कोटियाँ इन प्रयोग-बिन्दुओं पर बलों के मानों को प्रदर्शित करते हुये खींचो। बीच के किसी प्रयोग-बिन्दु L पर कोटि LP कार्य करते हुये बल के संगत मान को प्रदर्शित करती हुई खींचो; अब इन कोटियों के शिखर किसी CPD जैसे वक्र पर होंगे।

L के इतने ही निकट एक बिन्दु M लो, कि जब प्रयोग-बिन्दु LM दूरी हट जाय तो बल स्थिर ही माना जा सके।

इसलिये बल द्वारा किया गया कर्म = बल का परिमाण × वह दूरी जो उसका प्रयोग-बिन्दु हटा है $= LP \times LM =$ लगभग क्षेत्रफल PM।

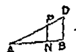
इसी प्रकार जब प्रयोग-बिन्दु M से N को हटता है तो कृत-कर्म = लगभग क्षेत्रफल QN, इत्यादि।

अतः यह परिणाम निकलता है कि जब प्रयोग-बिन्दु A से B को हटता है, तो कृत-कर्म $ACDB$ क्षेत्रफल के उतना ही अधिक निकट होता जायगा जितनी अधिक छोटी लम्बाइयाँ $LM, MN, ...$ली जायँ।

[जब वक्र CPD विषम हो तो लगभग क्षेत्रफल इस प्रकार निकाला जा सकता है ; AB को कुछ, मान लो 10, बराबर बराबर लम्बे संकीर्ण खण्डों में विभाजित करो ; इन खण्डों की बीच की कोटियाँ लो और इन बीच की कोटियों का औसत निकालो ; और इस औसत कोटि को AB दूरी से गुणा करो। इससे $ACDB$ का लगभग क्षेत्रफल मालूम हो जायगा।]

१३४—ऊपर की रचना के उदाहरण के रूप में मान लो हमें उस बल से किया हुआ कर्म मालूम करना है जो आरम्भ में शून्य था और जो *प्रयोग-बिन्दु के हटने के साथ साथ बदलता गया।*

यहाँ AC शून्य है, और $NP=\lambda.AN$, जहाँ पर λ कोई अचर राशि है।



$\therefore$ स्पज्या $PAN = \dfrac{PN}{AN} = \lambda$, अतः P, A से जाती हुई सरल रेखा पर होगा। इसलिये कृत-कर्म $=$क्षेत्रफल $ABD=\frac{1}{2}AB.BD=\frac{1}{2}\times$ प्रयोग-बिन्दु का स्थानान्तर $\times$ बल का अन्तिम मान।

उदाहरणमाला २१

१। एक आदमी कितना कर्म करेगा

(क) 2700 फुट ऊँचे पहाड़ के शिखर पर चढ़ने में यदि उसका भार 10 स्टोन है ?

(ख) 10 मील साइकिल पर जाने में यदि उसकी गति का प्रतिरोध 5 पौं० भार के बराबर है ?

२। एक जंजीर जिसका भार प्रति फुट 8 पौं० है, घुरादंड से,

कर्म की 40 लाख इकाइयों के खर्च करने पर, लपेटी गई है ; जंजीर की लम्बाई मालूम करो।

३। एक सुरंग, जिसका क्षैतिज परिच्छेद एक आयत है जिसकी लम्बाई 10 फ़ुट और चौड़ाई 8 फ़ुट है, पृथ्वी में 100 फ़ुट गहरी खोदी गई है। यदि मिट्टी का औसत भार प्रति घन फ़ुट 150 पौ० है तो बताओ मिट्टी को पृथ्वी के तल तक लाने मे कितना कर्म करना पड़ा है ?

४। कितना घन फ़ुट पानी 100 अश्व–सामर्थ्य का इंजन एक घण्टे में 150 फ़ुट की गहराई से उठायेगा ?

५। कितने घंटों में 18 अश्व-सामर्थ्य का इंजन पानी से भरी हुई ऊर्ध्वाधर सुरंग को जिसका व्यास 9 फुट और गहराई 420 फ़ुट है, खाली करेगा ?

६। उस इंजन की अश्व-सामर्थ्य मालूम करो जो पानी से भरी बेलनाकार सुरंग को जिसका व्यास 8 फुट और गहराई 600 फ़ुट है, 32 घंटों में खाली करेगा।

७। 20 अश्व-सामर्थ्य के एक इंजन को 5000 घन फ़ुट पानी 100 फुट की ऊँचाई पर पम्प करने में कितना समय लगेगा, यदि कर्म का एक-तिहाई भाग रगड़ इत्यादि से नष्ट हो जाता है।

८। एक आदमी जिसका भार 10 स्टोन है, 18 इंच प्रति सैकण्ड की दर से एक रस्सी पर चढ़ रहा है। सिद्ध करो कि वह $\frac{1}{3}$ अश्व-सामर्थ्य से कुछ कम कर्म कर रहा है।

९। ईंटों की एक मीनार बनवानी है, जिसका आधार एक आयत है जिसकी बाहरी नापें 22 फ़ुट और 9 फुट, ऊँचाई 66 फ़ुट और दीवारों की मोटाई 2 फ़ुट है। कितने घण्टों में 3 अश्व सामर्थ्य का एक इंजन ईंटों को पृथ्वी से उठायेगा यदि एक घन फुट ईंट का भार 112 पौ० है ?

१०। 275 फ़ुट गहरी कोयले की एक खान की तह पर लोहे का कोयले से भरा हुआ एक पिंजरा है जिस में लोहे का भार 14 हंडरेडवेट है ; केवल पिंजरे का भार 4 हंडरेडवेट 109 पौं० है और तार का भार जो पिंजरे को

उठाता है 6 पौं० प्रति गज है। बोझ को पृथ्वी के तल तक उठाने में कितना कर्म करना पड़ेगा और उस इंजन की अश्व सामर्थ्य मालूम करो जो उस कर्म को 40 सैकण्ड में करता है।

११। एक जहाज 15 मील प्रति घण्टे की चाल से जा रहा है। यदि उसके इंजनों की फलवत् अश्व-सामर्थ्य 10,000 है, तो बताओ उसकी गति का प्रतिरोध क्या है ?

१२। एक आदमी 6 मील प्रति घंटे की दर से एक पहाड़ी के ऊपर साइकिल चला रहा है; पहाड़ी का ढाल 20 में 1 है; यदि आदमी और साइकिल का भार 200 पौं० है तो सिद्ध करो कि वह कमसे कम ·16 अश्व-सामर्थ्य से कर्म कर रहा है।

१३। एक आदमी एक मिनट में ४० बार आघात करके नाव को 10 मील प्रति घण्टे की दर से खे रहा है और उसकी गति का प्रतिरोध 8 पौं० भार के बराबर है; बताओ प्रत्येक आघात में वह कितना कर्म करता है और किस अश्व-सामर्थ्य से वह कर्म कर रहा है ?

१४। एक वेनीशियन झिलमिली में 30 चर छड़ें हैं जिनकी मोटाई उपेक्षणीय है और जब वह नीचे लटकी रहती है तो क्रमागत छड़ों के प्रत्येक जोड़े की दूरी $2\frac{1}{2}$ इंच रहती है। यदि प्रत्येक छड का भार 4 औंस हो, तो बताओ झिलमिली के ऊपर खींचने में कितना कर्म करना पड़ेगा ? यदि ऐसी n छड़े होतीं तो बताओ कितना कर्म करना पड़ता ?

१५। एक वेनीशियन झिलमिली में शिखर की नियत छड के अतिरिक्त n पतली छड़ें है, और चर भाग का भार W है। जब झिलमिली झुका दी जाती है तो उसकी लम्बाई a होती है और जब ऊपर खींच ली जाती है तो लम्बाई b होती है; सिद्ध करो कि झिलमिली के ऊपर खींचने में गुरुत्व के विपरीत $W.\frac{n+1}{2n}(a-b)$ कर्म करना पड़ता है।

१६। एक ठोस अर्द्धगोला, जिसका भार 12 पौं० है और जिसकी त्रिज्या 1 फ़ुट है, एक मेज़ पर अपने चौरस फलक पर रखा हुआ है।

उसको इस प्रकार उलटने में कितने फुट-पौंड कर्म करना पड़ेगा कि उसका वक्र पृष्ठ मेज पर स्पर्श करते हुये वह समतुलित अवस्था में हो जाय ? (धारा 130 के फल का प्रयोग करो ।)

१७। लकड़ी का एक सम कुंदा जिसका भार आधा टन है त्रिकोणाधार समपार्श्व के आकार का है। उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद की भुजायें क्रमसे $1\frac{1}{2}$ फुट, 2 फ़ुट और $2\frac{1}{2}$ फुट है। कुंदा पृथ्वी पर अपने सबसे छोटे फलक पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि उसको एक कोर पर इस प्रकार उठाने में कि वह अपने सबसे चौड़े फलक पर गिर पड़े लगभग ·27 फुट-टन कर्म करना पड़ेगा।

१८। एक बल एक कण पर इस प्रकार कार्य करता है कि उसका प्रारम्भि मान 20 पौं० भार के बराबर है और जब वह क्रम से 1, 2, 3, 4, 5, और 6 फ़ुट हट जाता है तो उसके मान कण की गति की दिशा में 25, 29, 32, 31, 27, और 24 पौं० भार के बराबर होते हैं। यह मान कर कि प्रत्येक फ़ुट के स्थान्तरण में बल समान रूप से परिणमित होता है, बल द्वारा किया गया कर्म लेखा-चित्र द्वारा मालूम करो।

अध्याय १२

मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समतुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरनी तथा घिरनियों की श्रेणी, (३) आनत धरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेच (स्क्रू) हैं।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेंगे कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुक्त सभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबंध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये वाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे [illegible] प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ [illegible] ने जहाँ पहले [illegible]

का प्रयोग होता था अब शब्द प्रयास का प्रयोग होने लगा है। भार की जगह शब्द प्रतिबल भी प्रयोग में आता है; कुछ लेखक भार के स्थान पर बोझ शब्द का भी प्रयोग करते हैं।

१३७—यान्त्रिक लाभ। यदि किसी मशीन में सामर्थ्य P और प्रतिरोध W समतुलित हो तो निष्पत्ति $W : P$ को मशीन का यान्त्रिक लाभ कहते हैं;

इस प्रकार $\frac{\text{प्रतिरोध}}{\text{सामर्थ्य}}$ = यांत्रिक लाभ,

और प्रतिरोध = सामर्थ्य × यान्त्रिक लाभ।

प्रायः सभी मशीनें ऐसी बनी होती हैं कि यांत्रिक लाभ वह निष्पत्ति होती है जो इकाई से बड़ी है।

यदि किसी मशीन में यान्त्रिक लाभ इकाई से कम हो तो उसे यान्त्रिक हानि कह सकते हैं।

बल-निष्पत्ति शब्द का भी कभी कभी यान्त्रिक लाभ की जगह प्रयोग होता है।

वेग-निष्पत्ति। सामर्थ्य के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी और उसी समय में प्रतिरोध के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी की निष्पत्ति को मशीन की वेग-निष्पत्ति कहते हैं, इस प्रकार वेग-निष्पत्ति

$$= \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}}.$$

यदि मशीन इस प्रकार की हो कि उसके अवयव भागों के उठाने में कोई कर्म न हो और वह पूर्णतया चिकनी हो, तो यांत्रिक लाभ और वेग-निष्पत्ति बराबर होगी, इसलिये

$$\frac{W}{P} = \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}},$$

और इसलिये, $P \times$ दूरी जो P हटता है $= W \times$ दूरी जो W हटता है, अर्थात्

P में [illegible] कर्म $= W$ के विपरीत किया गया कर्म।

अध्याय १२

मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समतुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरनी तथा घिरनियों की श्रेणी, (३) आनत धरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेंच (स्क्रू) हैं।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेंगे कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुजा सभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबंध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये बाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे अर्थ में भी प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ पिछले वर्षों में जहाँ पहले शब्द सामर्थ्य

का प्रयोग होता था अब शब्द प्रयास का प्रयोग होने लगा है। भार की जगह शब्द प्रतिबल भी प्रयोग में आता है; कुछ लेखक भार के स्थान पर बोझ शब्द का भी प्रयोग करते हैं।

१३७—यांत्रिक लाभ। यदि किसी मशीन में सामर्थ्य P और प्रतिरोध W समतुलित हों तो निष्पत्ति $W : P$ को मशीन का यांत्रिक लाभ कहते हैं;

इस प्रकार $\frac{\text{प्रतिरोध}}{\text{सामर्थ्य}} = \text{यांत्रिक लाभ},$

और प्रतिरोध = सामर्थ्य × यांत्रिक लाभ।

प्रायः सभी मशीनें ऐसी बनी होती हैं कि यांत्रिक लाभ वह निष्पत्ति होती है जो इकाई से बड़ी है।

यदि किसी मशीन में यांत्रिक लाभ इकाई से कम हो तो उसे यांत्रिक हानि कह सकते हैं।

बल-निष्पत्ति शब्द का भी कभी कभी यांत्रिक लाभ की जगह प्रयोग होता है।

वेग-निष्पत्ति। सामर्थ्य के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी और उसी समय में प्रतिरोध के प्रयोग-बिन्दु के हटने की दूरी की निष्पत्ति को मशीन की वेग-निष्पत्ति कहते हैं, इस प्रकार वेग-निष्पत्ति

$$= \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}}।$$

यदि मशीन इस प्रकार की हो कि उसके अवयव भागों के उठाने में कोई कर्म न हो और वह पूर्णतया चिकनी हो, तो यांत्रिक लाभ और वेग-निष्पत्ति बराबर होगी, इसलिये

$$\frac{W}{P} = \frac{\text{दूरी जो } P \text{ हटता है}}{\text{दूरी जो } W \text{ हटता है}},$$

और इसलिये, $P \times$ दूरी जो P हटता है $= W \times$ दूरी जो W हटता है, अर्थात्

P से किया गया कर्म $= W$ के विपरीत किया गया कर्म।

अध्याय १२

मशीन

(Machines)

१३५—इस अध्याय में हम कुछ साधारण मशीनों के समतुलन पर विचार तथा उनकी व्याख्या करेंगे। यह मशीन (१) लीवर, (२) घिरनी तथा घिरनियों की श्रेणी, (३) आनत धरातल, (४) चक्र-धुरी, (५) साधारण तुला, (६) विषम-भुज-तुला, और (७) पेच (स्क्रू) है।

लीवर, चक्र-धुरी, तुला और विषम-भुज-तुला एक ही प्रकार की मशीनें हैं। इनमें या तो एक बिन्दु या एक अक्ष नियत होता है जिसके चारों ओर मशीन घूमती है।

घिरनियों के लचीली डोरी अथवा डोरियाँ आवश्यक भाग होते हैं।

हम यह मान लेंगे कि इन मशीनों के भिन्न भिन्न भाग चिकने और दृढ़ हैं, और प्रयुजा सभी तागे अथवा डोरियाँ पूर्णतया लचीली हैं, और मशीनों पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं।

वास्तविक व्यवहार में ये प्रतिबंध बहुत ही मशीनों में प्रायः सन्तुष्ट नहीं होते।

१३६—जब किसी मशीन पर दो लगाये गये बाह्य बल समतुलित होते हैं, तो एक बल को सामर्थ्य और दूसरे को भार कहते हैं।

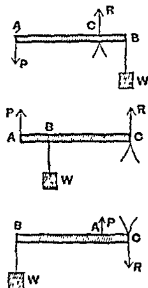
व्यवहार में मशीन किसी प्रतिरोध को पराजित करने के कार्य में लाई जाती है; जिस बल को हम मशीन पर लगाते हैं सामर्थ्य कहलाती है, और प्रतिरोध जिसे पराजित किया जाता है चाहे वह किसी रूप में क्यों न हो भार कहलाती है।

दुर्भाग्य से शब्द सामर्थ्य का मशीन के सम्बन्ध में एक दूसरे अर्थ में भी प्रयोग होता है (धारा १३१); कुछ पिछले वर्षों से जहाँ पहले शब्द सामर्थ्य

(क) लीवर

१४०—लीवर में एक दृढ दंड, सीधा अथवा टेढा, होता है, जिसका एक बिन्दु नियत होता है जिसके चारों ओर बाकी लीवर घूम सकता है। इस नियत बिन्दु को आलम्ब कहते हैं, आलम्ब और सामर्थ्य और भार की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरियों को लीवर की भुजायें कहते हैं।

जब लीवर सीधा होता है और सामर्थ्य और भार लीवर पर लम्ब होते है, तो उसकी तीन श्रेणियां होती है।



पहली श्रेणी। इसमे सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के विपरीत ओर कार्य करते हैं।

दूसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से अधिक दूरी पर कार्य करता है।

तीसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से कम दूरी पर कार्य करता है।

१४१—सीधे लीवर के समतुलन के नियम। तीनों स्थितियों में तीन समानान्तर बल लीवर पर कार्य करते हैं, इसलिये आलम्ब पर प्रतिबल R, P और W के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

पहली श्रेणी में P और W सम समानान्तर बल हैं, इसलिये उनका परिणामीबल $P+W$ है। अत

$$R=P+W.$$

१३८--निम्न सिद्धान्त, जिसे कर्म का सिद्धान्त कहते हैं, सर्वसाधारण सिद्धान्त है । चाहे हम किसी भी मशीन का प्रयोग क्यों न करें, यदि घर्षण नहीं है और मशीन का भार उपेक्षणीय है, तो सामर्थ्य से किया गया कर्म हमेशा भार अथवा प्रतिरोध के विपरीत किये गये कर्म के बराबर होता है ।

मान लो जिस मशीन का हम प्रयोग करते हैं उससे यान्त्रिक लाभ है, तो सामर्थ्य भार से कम होगा, और वह दूरी जो सामर्थ्य का प्रयोग-बिन्दु हटता है उसी अनुपात में उस दूरी से अधिक होगी जो भार का प्रयोग-बिन्दु हटेगा । इसे कभी कभी साधारण भाषा में इस प्रकार कहते हैं ; 'सामर्थ्य में जितना लाभ होता है वेग में उतनी ही हानि होती है' ।

इसे इस प्रकार कहना और भी ठीक होगा कि यान्त्रिक लाभ वेग की उसी अनुपात में कमी से प्राप्त होता है । *मशीन के प्रयोग से कर्म की प्राप्ति कभी नहीं होती* यद्यपि यान्त्रिक लाभ प्रायः प्राप्त हो जाता है ।

१३९—अगले अध्याय में यह मालूम होगा कि व्यवहार में मशीन के प्रयोग से कुछ न कुछ कर्म की अवश्य हानि होती है ।

मशीन के लाभ निम्नलिखित हैं : मशीन के प्रयोग से .

(१) *एक आदमी वह भार उठा सकता है अथवा उन प्रतिरोधों को पराजित कर सकता है जो वह बिना सहायता के नहीं कर सकता, जैसे, घिरनियों की श्रेणी, अथवा चक्रधुरी, अथवा जैक स्क्रू, इत्यादि के प्रयोग से ।*

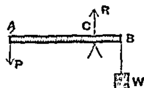
(२) एक बिन्दु पर लगाये हुये वेग को किसी दूसरे बिन्दु पर अधिक तेज वेग में स्थानान्तरित किया जा सकता है, *जैसे कि साईकिल के प्रयोग में ।*

(३) कोई बल अधिक उपयुक्त बिन्दु पर अथवा अधिक उपयुक्त रीति से लगाया जा सकता है *जैसे अग्नि उत्तेजित करने में फुकनी का प्रयोग, अथवा किसी इमारत के शिखर पर लगी हुई घिरनी के ऊपर होकर जाती हुई लम्बी रस्सी द्वारा गारे की बाल्टी उठाने में रस्सी के दूसरे सिरे पर पृथ्वी पर खड़े हुये आदमी द्वारा लगाया हुआ बल ।*

(क) लीवर

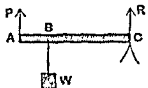
१४०—लीवर मे एक दृढ दंड, सीधा अथवा टेढा, होता है, जिसका एक विन्दु नियत होता है जिसके चारो ओर बाकी लीवर घूम सकता है। इस नियत बिन्दु को आलम्ब कहते हैं, आलम्ब और सामर्थ्य और भार की क्रिया-रेखाओं के बीच की लम्ब दूरियों को लीवर की भुजायें कहते हैं।

जब लीवर सीधा होता है और सामर्थ्य और भार लीवर पर लम्ब होते हैं, तो उसकी तीन श्रेणियां होती हैं।

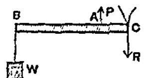


पहली श्रेणी। इसमें सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के विपरीत ओर कार्य करते हैं।

दूसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से अधिक दूरी पर कार्य करता है।



तीसरी श्रेणी। इसमें सामर्थ्य P और भार W आलम्ब C के एक ही ओर कार्य करते हैं, परन्तु सामर्थ्य भार की अपेक्षा आलम्ब से कम दूरी पर कार्य करता है।



१४१—सीधे लीवर के समतुलन के नियम।

तीनों स्थितियों में तीन समानान्तर बल लीवर पर कार्य करते हैं, इसलिये आलम्ब पर प्रतिबल R, P और W के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

पहली श्रेणी में P और W सम समानान्तर बल हैं, इसलिये उनका परिणामीबल $P+W$ है। अतः

$$R=P+W.$$

दूसरी श्रेणी में P और W विषम समानान्तर बल हैं, इसलिये

$$R = W - P.$$

इसी प्रकार तीसरी श्रेणी में

$$R = P - W.$$

पहली और तीसरी श्रेणी में हम देखते हैं कि R और P विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं, दूसरी श्रेणी में वे एक ही दिशा में कार्य करते हैं।

तीनों श्रेणियों में, चूंकि P और W का परिणामीबल C से जाता है, इसलिये जैसा धारा ५२ में,

$$P.AC = W.BC,$$

अर्थात् $P \times P$ की भुजा $= W \times W$ की भुजा।

चूंकि $\frac{W}{P} = \frac{P \text{ की भुजा}}{W \text{ की भुजा}}$, हम देखते हैं कि पहली श्रेणी में प्रायः और दूसरी श्रेणी में हमेशा यांत्रिक लाभ होता है, परन्तु तीसरी श्रेणी में यांत्रिक हानि होती है।

तीसरी श्रेणी के लीवर से व्यवहारिक लाभ यह है कि एक ऐसे बिन्दु पर बल लगाया जा सकता है जिसपर सीधे सीधे बल का लगाना असुविधाजनक होता है।

इस धारा में हमने लीवर के भार को नगण्य माना है।

यदि इस भार पर भी विचार किया जाय, तो जैसा धारा ९१ में, हम समतुलन के प्रतिबन्ध C आलम्ब पर बलों के घूर्णों के बीजीय योग को शून्य के बराबर रखकर मालूम कर सकते हैं।

लीवर का सिद्धान्त आर्कमीडीज को मालूम था, जो ईसा से पहले तीसरी शताब्दी में था। सोलहवीं शताब्दी में बल-समानान्तर-चतुर्भुज के आविष्कार तक स्थिति विज्ञान का यही मौलिक सिद्धान्त था।

१४२—भिन्न श्रेणियों के लीवरों का उदाहरण:

पहली श्रेणी। पोकर (जब उसका प्रयोग अग्नि उत्तेजित करने में होता है और अंगीठी ही यह आधार का काम करती है); [illegible]

(जब उसका प्रयोग कील निकालने में होता है); को-बार (जब उसका प्रयोग उसके एक बिन्दु को किसी नियत आलम्बन पर रख कर होता है); तुला; पम्प का ब्रेक, इत्यादि।

इस श्रेणी के द्विक लीवर: कैंची, चिमटा, इत्यादि।

दूसरी श्रेणी। व्हील-बैरो; डाट खोलने का पेंच; को-बार (जब उसका एक सिरा भूमि से लगा हो); डाँड (जब पानी से स्पर्श करता हुआ उसका सिरा स्थिर माना जाय।)

सरौता इस श्रेणी का द्विक लीवर है।

तीसरी श्रेणी। खराद का ट्रेडिल; मनुष्य का कोहनी से कलाई तक हाथ (जब उसे हथेली पर भार रखकर साधना होता है; कोहनी आलम्ब होती है और मांसपेशी से लगाया गया बल सामर्थ्य होता है)

सँड़सी इस श्रेणी का द्विक लीवर है।

१४३—टेढ़े लीवर। मान लो AOB एक टेढ़ा लीवर है जिसका आलम्ब O है, और मान लो OL और OM, O से सामर्थ्य P और प्रतिरोध W की क्रिया-रेखाओं AC और BC पर लम्ब हैं।

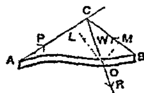
धारा ९१ के समतुलन के प्रतिबन्धों का प्रयोग करके अर्थात् O पर घूर्ण लेकर

$$P.OL = W.OM \quad \ldots \quad \ldots \quad (१);$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{OM}{OL}$$

$$= \frac{\text{आलम्ब से प्रतिरोध की क्रिया-रेखा पर लम्ब}}{\text{आलम्ब से सामर्थ्य की क्रिया-रेखा पर लम्ब}}।$$

O पर प्रतिबल निकालने के लिये मान लो कि P और W की क्रिया-रेखायें C पर मिलती हैं। चूंकि लीवर पर केवल तीन बल कार्य करते हैं, O पर प्रतिबल R की क्रिया-रेखा C से जायगी, इसलिये लामी के प्रमेय से,



$$\frac{R}{\text{ज्या}\, ACB} = \frac{P}{\text{ज्या}\, BCO} = \frac{W}{\text{ज्या}\, ACO}.$$

प्रतिबल, जैसा कि धारा ४६ में R, P, और W को दो लम्ब दिशाओं में विश्लिष्ट करके भी मालूम किया जा सकता है।

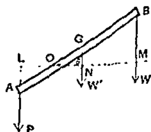
यदि सामर्थ्य और प्रतिरोध समानान्तर बल हों, तो प्रतिबल R इनके समानान्तर और $(P+W)$ के बराबर होगा, और पहले की भाँति

$$P.OL=W.OM,$$

जहाँ पर OL और OM, O से बलों की क्रिया-रेखाओं पर खींचे हुये लम्ब है।

यदि लीवर का भार W' उपेक्षणीय न हो तो हमें घूर्ण के समीकरण में एक और अधिक पद लाना पड़ेगा।

१४४—यदि किसी सीधे लीवर के सिरों पर जो ऊर्ध्वाधर से किसी भी कोण पर भुका हुआ है, रखे हुये दो भार आलम्ब पर समतुलित हों, तो वे लीवर के ऊर्ध्वाधर से कोई दूसरा कोण बनाने पर भी समतुलित रहेंगे।



मान लो AB लीवर है, जिसका भार W' है, और G उसका गुरुत्व-केन्द्र है। मान लो लीवर आलम्ब O पर समतुलित है जब वह क्षैतिज से θ कोण बनाता है, और A और B पर क्रमसे P और W भार रखे हैं।

O से एक क्षैतिज रेखा $LONM$ खींचो जो P, W', और W की क्रिया-रेखाओं को क्रमसे L, N, और M पर मिलें।

चूंकि बल O पर समतुलित रहते हैं, इसलिये

$$P.OL=W.OM+W'.ON.$$

$\therefore$ $P.OA$ कोज्या $\theta=W.OB$ कोज्या $\theta+W'.OG$ कोज्या θ.

$$\therefore P.OA=W.OB+W'.OG.$$

यह समतुलन का प्रतिबन्ध लीवर के क्षैतिज से भुकाव θ से स्वतंत्र है; अतः लीवर की किसी दूसरी स्थिति के लिये भी यह सत्य रहेगा।

अतः यदि लीवर एक स्थिति में समतुलित रहे तो वह सब स्थितियों में भी समतुलित रहेगा।

उदाहरणमाला २२

१। बिना भार के किसी लीवर में यदि एक बल 10 पौ० भार के बराबर है और आलम्ब पर प्रतिबल 16 पौ० भार के बराबर है, और छोटी भुजा की लम्बाई 3 फ़ुट है, तो बड़ी भुजा की लम्बाई मालूम करो।

२। बताओ आलम्ब कहां होगा जबकि 6 पौ० का एक भार एक 7 फुट लम्बे सीधे बिना भार के लीवर पर 8 पौं० के भार से समतुलित होता हैं ?

यदि प्रत्येक भार एक पौ० बढा दिया जाय तो बताओ किस ओर लीवर घूम जायगा ?

३। यदि किसी बिना भार के लीवर पर लगाये गये दो बल समतुलित हों, और यदि आलम्ब पर प्रतिबल बलों के अन्तर का दस गुना हो, तो भुजाओं की निष्पत्ति मालूम करो।

४। एक गज लम्बे एक लीवर के सिरों पर 6 और 20 पौ० के भार लगे हुये हैं और वह एक सिरे से 9 इंच की दूरी पर समतुलित रहता है। लीवर का भार मालूम करो।

५। 12 फ़ुट लम्बा एक सीधा लीवर AB, A से 1 फ़ुट दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है जब A से 13 पौ० का भार लटकाया जाय। वह B से 1 फ़ुट दूर एक बिन्दु पर समतुलित होता है जब B से 11 पौं० का भार लटकाया जाय। सिद्ध करो कि लीवर का गुरुत्व-केन्द्र उसके मध्य-बिन्दु से 5 इंच दूर है।

६। एक सीधा सम लीवर उसकी भुजाओं के सिरों पर लगे हुये 12 पौं० और 5 पौं० भारों से समतुलित रहता है और एक भुजा की लम्बाई दूसरी से दुगनी है। लीवर का भार क्या है ?

७। एक सीधे सम लीवर का आलम्ब, जिसकी लम्बाई 5 फुट और भार 10 पौं० है, एक सिरे पर है। 3 और 6 पौ० के भार आलम्ब से क्रमशः 1 और 3 फुट की दूरी पर लगे हैं, तथा दूसरे सिरे पर लगाया गया एक बल उसे क्षैतिज अवस्था में रखता है। आलम्ब पर प्रतिबल मालूम करो।

२१। एक घनाकार कुन्दा जिसकी कोर a है, एक फावार से उसकी कोर के मध्य-बिन्दु पर, गुरुत्व-केन्द्र से खींचे गये धरातल में लगाकर उलटा जा रहा है। यदि फावार को, जब वह क्षैतिज से 60° के कोण पर झुका हो, रोक लिया जाय, तो कुन्दे का नीचे का फलक क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। यदि कुन्दे का भार लगाये हुये बल का n गुना हो, तो फावार की लम्बाई मालूम करो, बल फावार से समकोण बनाता हुआ लगाया गया है।

(ख) घिरनियाँ

१४५—घिरनी में लकड़ी अथवा धातु का एक पहिया होता है जिसकी परिधि में नाली बनी होती है जिसमें डोरी अथवा रस्सी डाली जाती है; वह धुरी के चारो ओर जो पहिये के केन्द्र से जाती है और उसके धरातल पर लम्ब रहती है, बेरोक घूम सकती है; इस धुरी के सिरे लकड़ी के एक ढाँचे पर, जिसे घिरनी का आधार गुटका कहते है, जड़े रहते हैं।

घिरनी को अनियत अथवा नियत कहते हैं जब उसका गुटका अनियत अथवा नियत रहता है।

घिरनी का भार उन भारों की तुलना में जो वह सम्हालती है प्राय इतना कम होता है कि उसको नगण्य माना जा सकता है; ऐसी घिरनी को बिना भार की घिरनी कहते हैं।

हम डोरी अथवा रस्सी के भार को जो घिरनी के ऊपर जाती है नगण्य मानेंगे।

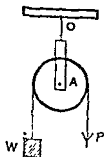
इस अध्याय में हम घिरनियों को पूरी तौर से चिकनी मानेंगे, इसलिये घिरनियों के ऊपर जाती हुई डोरियों के तनाव सारी लम्बाई में स्थिर रहेंगे।

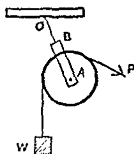
१४६—एक मात्र घिरनी। एक मात्र घिरनी से लाभ यह है कि इसकी सहायता से हम सामर्थ्य को भिन्न दिशा में जिसमें हमें सुविधा होती है लगा सकते हैं।

जैसे, पहले चित्र में, भूमि पर खड़ा हुआ एक आदमी रस्सी के एक सिरे को ऊर्ध्वाधर खींचता हुआ दूसरे सिरे पर लटकते हुये भार W को सम्हाल सकता है; दूसरे चित्र में वही आदमी तिरछा खींचता हुआ उसी भार को सम्हाल सकता है।

दोनों स्थितियों में घिरनी के ऊपर जाती हुई डोरी का तनाव नहीं बदलता; इसलिये सामर्थ्य P भार W के बराबर होता है।

पहले चित्र में नियत आलम्बन जिससे गुटका लगा हुआ है, पर प्रतिबल गुटके पर कार्य करते हुये अन्य बलों से समतुलित होता है, और इसलिये $W+P+w$ अर्थात् $2W+w$ के बराबर होगा जहाँ पर w घिरनी और गुटके का भार है।





दूसरे चित्र में, यदि घिरनी का भार नगण्य माना जाय, तो सामर्थ्य P और भार W, चूँकि यह बराबर हे, OA रेखा से बराबर कोण बनायेंगे।

अत: यदि सम्हालनेवाली डोरी OB का तनाव T, और P और W की क्रिया-रेखाओं के बीच का कोण 2θ हो, तो

$$T=P\text{कोज्या }\theta+W\text{ कोज्या }\theta=2W\text{ कोज्या }\theta.$$

यदि घिरनी का भार w हो तो

$$T^2=(W+w)^2+P^2+2(W+w).P.\text{ कोज्या }2\theta$$

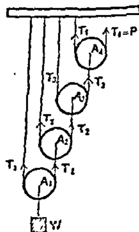
$$=2W^2+2Ww+w^2+2(W+w).W(2\text{ कोज्या}^2\theta-1),$$ चूँकि P और W बराबर हैं,

$$=w^2+4W(W+w)\text{ कोज्या}^2\theta.$$

१४७—अब हम घिरनियों की तीनों श्रेणियों पर विचार करेंगे और इसमें प्रचलित क्रम का ही अनुकरण करेंगे ; इस क्रम का कोई विशेष कारण नहीं है, परन्तु संकेत के लिये इसमें सुबिधा है कि उसी क्रम को रखा जाय।

घिरनियों की प्रथम श्रेणी । इसमें प्रत्येक डोरी सम्हालनेवाली कड़ी से बँधी होती है। सामर्थ्य अथवा 'शक्ति' और भार के बीच में सम्बन्ध मालूम करना।

घिरनियों की इस श्रेणी मे सबसे नीचे की घिरनी से भार लटकाया जाता है। इस घिरनी के चारों ओर जाने वाली डोरी का एक सिरा नियत कड़ी से और दूसरा सिरा अगली ऊपर की घिरनी से बँधा होता है। इस दूसरी घिरनी के चारों ओर जाने वाली डोरी का एक सिरा नियत कड़ी से और दूसरा सिरा उससे अगली ऊपर की घिरनी से बँधा होता है, इत्यादि। सामर्थ्य अन्तिम डोरी के स्वतन्त्र सिरे से लगाया जाता है।



प्राय. एक और नियत घिरनी होती है जिसके ऊपर से अन्तिम डोरी का स्वतन्त्र सिरा जाता है जिससे सामर्थ्य को नीचे की ओर लगा सकते हैं।

मान लो नीचे से आरम्भ करके घिरनियाँ $A_1, A_2, ..$ हैं, और मान लो इनके ऊपर जाती हुई डोरियों के तनाव $T_1, T_2,...$ हैं। मान लो W भार और P सामर्थ्य हैं।

[टिप्पणी—किसी भी घिरनी, मान लो A_2 के ऊपर जाती हुई डोरी A_3 को ऊर्ध्वाधर ऊपर और A_2 को नीचे खींचती हैं।]

(१) मान लो घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं।

A_1, A_2....घिरनियों के समतुलन को यदि क्रम से लें, तो

$$2T_1=W; \quad \therefore \quad T_1=\frac{1}{2}W.$$

$$2T_2 = T_1; \quad \therefore \quad T_2 = \tfrac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2^2}W.$$

$$2T_3 = T_2; \quad \therefore \quad T_3 = \tfrac{1}{2}T_2 = \frac{1}{2^3}W.$$

$$2T_4 = T_3; \quad \therefore \quad T_4 = \tfrac{1}{2}T_3 = \frac{1}{2^4}W.$$

परन्तु हमारे चित्र मे, $T_4 = P$.

$$\therefore \; P = \frac{1}{2^4}W.$$

इसी प्रकार यदि n घिरनियाँ हों, तो

$$P = \frac{1}{2^n}W.$$

अत: घिरनियों की इस श्रेणी मे, यान्त्रिक लाभ $= \frac{W}{P} = 2^n$.

(२) मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके घिरनियों के भार क्रम से $w_1, w_2 \ldots$ हैं।

इस स्थिति में प्रत्येक घिरनी पर एक और बल नीचे की ओर कार्य करता है।

पहले की भाँति विश्लिष्ट करके

$$2T_1 = W + w_1,$$
$$2T_2 = T_1 + w_2,$$
$$2T_3 = T_2 + w_3,$$
$$2T_4 = T_3 + w_4.$$

$$\therefore \; T_1 = \frac{W}{2} + \frac{w_1}{2},$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}T_1 + \frac{w_2}{2} = \frac{W}{2^2} + \frac{w_1}{2^2} + \frac{w_2}{2},$$

$$T_3 = \tfrac{1}{2}T_2 + \frac{w_3}{2} = \frac{W}{2^3} + \frac{w_1}{2^3} + \frac{w_2}{2^2} + \frac{w_3}{2},$$

और $$P = T_4 = \frac{1}{2}T_3 + \frac{w_4}{2} = \frac{W}{2^4} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2}.$$

इसी प्रकार यदि n घिरनियाँ हों तो

$$P = \frac{W}{2^n} + \frac{w_1}{2^n} + \frac{w_2}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{w_n}{2}.$$

$$\therefore \; 2^n P = W + w_1 + 2w_2 + 2^2 w_3 + \ldots + 2^{n-1} w_n.$$

यदि सब घिरनियाँ बराबर हों, तो

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_n = w.$$

$$\therefore \; 2^n P = W + w(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1})$$

$$= W + w(2^n - 1),$$ गुणोत्तर श्रेणी को जोड़नेपर।

अतः यांत्रिक लाभ, $\frac{W}{P}$ घिरनियों के भार पर निर्भर रहता है।

हम देखते हैं कि घिरनियों की इस श्रेणी में जितना अधिक घिरनियों का भार होगा उतना ही अधिक P भी होगा जो दिये हुये भार W को साधेगा। घिरनियों के भार सामर्थ्य का प्रतिरोध करते हैं, इसलिये घिरनियाँ उतनी हल्की बनानी चाहियें जितना कि इष्ट शक्ति के लिये सम्भव हो।

कड़ी, जिससे घिरनियाँ लटकाई गई हैं, पर दबाव।

मान लो R कड़ी पर दबाव है। चूंकि R और बल, घिरनियों की श्रेणी और भार W को सम्हालते हैं, इसलिये

$$R + P = W + w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

$$\therefore R = W + w_1 + w_2 + \ldots + w_n - \frac{W + w_1 + 2w_2 + 2^2 w_3 + \ldots + 2^{n-1} w_n}{2^n}$$

$$= W\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$+ w_3\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \ldots + w_n\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

उदाहरण। यदि चार चल घिरनियाँ हों जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके 4,5,6, और 7 पौंड हैं, तो बताओ कि एक टन भार के पिंड को कौनसी सामर्थ्य सम्हालेगी ?

पिछली धारा के संकेतों का प्रयोग करके,

$2T_1=112+4$, $\therefore\ T_1=58.$
$2T_2=T_1+5=63$, $\therefore\ T_2=31\frac{1}{2}.$
$2T_3=T_2+6=37\frac{1}{2}$; $\therefore\ T_3=18\frac{3}{4}.$
$2P=T_3+7=25\frac{3}{4}$, $\therefore\ P=12\frac{7}{8}$ पौंड भार।

१४८--कर्म के सिद्धान्त की जांच। घिरनियों के भार नगण्य मानकर, यदि चार घिरनियाँ हों, तो $P=\frac{1}{2^4}W.$

यदि भार W, x दूरी उठता है, तो यदि दूरी A_1A_2 स्थिर रहे, घिरनी A_2, भी x दूरी उठेगी, परन्तु A_1 की कड़ी से मिलाने वाली डोरी x छोटी हो जायगी और डोरी का भाग x, A_1 के नीचे से फिसल जायगा, अतः घिरनी A_2, $2x$ ऊँची उठ जायगी।

इसी प्रकार, घिरनी A_3, $4x$ ऊँची, और घिरनी A_4, $8x$ ऊँची उठ जायगी।

चूंकि A_4, $8x$ ऊँची उठती है, इसलिये इस घिरनी की कड़ी से मिलाने वाली डोरी और इस घिरनी को उस बिन्दु से जहां पर P लगाया गया है मिलानेवाली दोनों ही डोरियाँ $8x$ कम हो जायगी।

अतः चूंकि डोरी का ढीला भाग A_4 घिरनी के नीचे से फिसल जाता है, इसलिये P का प्रयोग-बिन्दु $16x$ ऊँचा उठ जायगा अर्थात् उस डोरी का सोलह गुना उठ जायगा जो W का प्रयोग-बिन्दु उठता है।

अतः वेग-निष्पत्ति (धारा १३७) $=16$, इस प्रकार यह इस स्थिति में यांत्रिक लाभ है।

$$\text{और}\quad \frac{\text{सामर्थ्य से किया गया कर्म}}{\text{भार के विपरीत किया गया कर्म}}=\frac{P.16x}{W.x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2^4}W.\ 16x}{W.x}=\frac{W.x}{W.x}=1.$$

अतः सिद्धान्त की जाँच हो गई।

यदि हम घिरनियों के भारों पर भी विचार करें, और चार घिरनियों को लें, तो

$$P = \frac{W}{2^4} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2}.$$

पहले की भाँति यदि A_1, x दूरी उठती है, तो दूसरी घिरनियाँ क्रमसे $2x$, $4x$ और $8x$ ऊँची उठेंगी। अत: लटके हुये भार और घिरनियों के भारों पर किया गया कर्म

$$= W.x + w_1.x + w_2.2x + w_3.4x + w_4 8x$$

$$= 16x\left[\frac{W}{2} + \frac{w_1}{2^4} + \frac{w_2}{2^3} + \frac{w_3}{2^2} + \frac{w_4}{2}\right]$$

$= 16x \times P =$ सामर्थ्य से किया गया कर्म।

घिरनियों की संख्या चाहे कुछ भी क्यों न हो इसी प्रकार के प्रमाण का उसमें भी प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरणमाला २३

१। निम्न प्रश्नों में चल घिरनियाँ बिना भार की हैं, उनकी संख्या n है, भार W है और सामर्थ्य P है;

(क) यदि $n=4$ और $P=20$ पौं० भार, तो W मालूम करो।

(ख) यदि $n=4$ और $W=$ एक हंडरवेट, तो P मालूम करो।

(ग) यदि $W=56$ पौं० भार और $P=7$ पौं० भार, तो n मालूम करो।

२। निम्न प्रश्नों में सब चल घिरनियाँ बराबर हैं और प्रत्येक का भार w है, उनकी संख्या n है, सामर्थ्य P है और भार W है;

(क) यदि $n=4$, $w=1$ पौं० भार, और $W=97$ पौं० भार, तो P मालूम करो।

(ख) यदि $n=3$, $w=1\frac{1}{2}$ पौं० भार, और $P=7$ पौं० भार, तो W मालूम करो।

(ग) यदि $n=5$, $W=775$ पौं० भार, और $P=31$ पौं० भार, तो w मालूम करो।

(घ) यदि $W=107$ पौं० भार, $P=2$ पौं० भार, और $w=\frac{1}{2}$ पौं० भार, तो n मालूम करो।

३। घिरनियों की प्रथम श्रेणी में यदि 4 घिरनियाँ हैं, और हरएक घिरनी का भार 2 पौं० है, तो बताओ 20 पौं० भार का सामर्थ्य कितना भार उठा सकता है?

४। यदि 3 चल घिरनियाँ हैं, जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 9, 2, और 1 पौं० हैं, तो बताओ कौनसा बल 69 पौं० भार को सम्हालेगा?

५। यदि 4 चल घिरनियाँ हैं, जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 4, 3, 2, और 1 पौं० हैं, तो बताओ कौनसा बल 54 पौं० भार को सम्हालेगा?

६। यदि 4 चल घिरनियाँ हैं, जिनमे से प्रत्येक का भार w है और सामर्थ्य P है, तो सिद्ध करो कि कड़ी पर दबाव $15P-11w$ होगा।

७। यदि 3 चल घिरनियाँ हैं और उनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 4, 2, और 1 पौं० हैं, तो बताओ 28 पौं० के भार को सम्हालने के लिये कितना बल लगाना पड़ेगा?

८। यह मान कर कि घिरनियाँ बिना भार की हैं, सिद्ध करो कि यान्त्रिक लाभ वास्तविक लाभ से अधिक हो जाता है।

९। घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें हरएक घिरनी पृथक पृथक डोरी से लटकती है, यदि घिरनियाँ 3 हों तो एक भार 7 पौं० भार के सामर्थ्य से सम्हाला जा सकता है, परन्तु यदि घिरनियाँ 4 हों तो वही भार 4 पौं० भार के सामर्थ्य से सम्हाला जा सकता है। सम्हाले हुये भार और घिरनियों के भार, जो सब बराबर हैं, मालूम करो।

१०। घिरनियों की एक श्रेणी में 4 घिरनियाँ हैं और हर एक पृथक डोरी से लटकी हैं। डोरियों के एक एक सिरे ऊपर के गुटके से बँधे

हुये हैं और सब स्वतंत्र सिरे ऊर्ध्वाधर हैं। यदि सबसे नीचे से आरम्भ करके घिरनियों के भार w, $2w$, $3w$, और $4w$ हैं, तो वह सामर्थ्य मालूम करो जो $15w$ के भार को सम्हाल सकता है, और उस एकमात्र बल का परिमाण भी मालूम करो जो उस कड़ी को सम्हाल सके जिसमें डोरियों के दूसरे सिरे बँधे हुये हैं।

११। चार भारी घिरनियों की श्रेणी में, यदि P सामर्थ्य और W भार हैं, तो सिद्ध करो कि कड़ी पर दबाव $\frac{1}{1}\frac{5}{6}W$ और $15P$ के बीच में हैं।

१२। एक आदमी, जिसका भार 12 स्टोन है, 4 भार हीन घिरनियों की श्रेणी में सबसे नीचे की घिरनी से लटका हुआ है। श्रेणी की प्रत्येक घिरनी पृथक पृथक डोरी से लटकी हुई है। आदमी अपने आप को उस डोरी के सिरे को खींच कर सम्हाले हुए है जो एक नियत घिरनी के ऊपर से जाती है। इस डोरी पर उसके खिंचाव का परिमाण मालूम करो।

१३। एक आदमी, जिसका भार 156 पौं० है, 4 घिरनियों की श्रेणी में सबसे नीचे की घिरनी से लटका हुआ है। हर एक घिरनी का भार 10 पौं० है। वह अपने आप को उस डोरी के सिरे को खींच कर सम्हाले हुये है जो एक नियत घिरनी के ऊपर से जाती है। सब डोरियों को ऊर्ध्वाधर मान कर वह बल मालूम करो जो वह इस डोरी पर लगाता है।

१४९—घिरनियों की द्वितीय श्रेणी। इस में एक ही डोरी सब घिरनियों के चारों ओर जाती है। सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

इस श्रेणी में दो गुटके होते हैं जिनमें से हरएक में घिरनियाँ होती हैं। ऊपर का गुटका नियत और नीचे का चल होता है। एक ही डोरी सब घिरनियों के चारों ओर जाती है जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

यदि ऊपर तथा नीचे के गुटके में घिरनियों की संख्या वही है (चित्र १), तो डोरी का एक सिरा ऊपर के गुटके से बाँधा जाता है। यदि

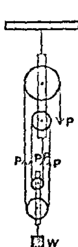


Fig. 1.

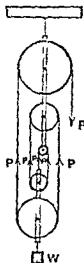


Fig. 2.

ऊपर के गुटके में घिरनियों की संख्या नीचे के गुटके से एक अधिक हो (चित्र २), तो डोरी का एक सिरा नीचे के गुटके से बाँधा जाता है।

पहली स्थिति में गुटकों को मिलाने वाली डोरी के भागों की संख्या सम और दूसरी स्थिति में विषम होती है।

दोनों स्थितियों में मान लो नीचे के गुटके में डोरी के भागों की संख्या n है। चूँकि एक ही डोरी चिकनी घिरनियों के ऊपर से जाती है अतः हरएक भाग का तनाव P है, इसलिये नीचे के गुटके पर ऊपर की ओर पूरा बल $n.P$ है।

मान लो उठाया गया भार W है, और नीचे के गुटके का भार w है।

अतः $W+w=nP$, जिससे इष्ट सम्बन्ध प्राप्त हो जायगा।

व्यवहार में दोनों गुटकों की घिरनियाँ प्रायः एक दूसरे के समानान्तर होती है, इस प्रकार डोरियाँ गणित के विचार से समानान्तर नहीं होती है;

परन्तु वे लगभग समानान्तर ही होती हैं, इसलिये उक्त सम्बन्ध लगभग सही रहता है ।

उदाहरणमाला २४

१। यदि 5 पौं० का एक भार 24 पौं० के भार को सम्हालता है, तो नीचे के गुटके का भार मालूम करो जब दोनों गुटकों में तीन तीन घिरनियाँ हैं ।

२। यदि डोरी के सिरे पर क्रमसे 5 और 6 पौं० के लगाये गये भार नीचे के गुटके पर 18 और 22 पौं० के भार सम्हालते हों, तो डोरियों की संख्या और नीचे के गुटके का भार मालूम करो ।

३। यदि क्रमसे 4 और 5 पौं० के भार 5 और 18 पौं० के भारों को सम्हालते हैं तो बताओ नीचे के गुटके का क्या भार है और उसमें कितनी घिरनियाँ हैं ?

४। यदि 6 पौं० का भार 28 पौं० के भार को सम्हालता है और 8 पौं० का भार 42 पौं० के भार को सम्हालता है, तो डोरियों की संख्या और नीचे के गुटके का भार मालूम करो ।

५। घिरनियों की द्वितीय श्रेणी में यदि नीचे के गुटके से एक डोरी लटकाई जाय और टोकरी में बैठा हुआ एक आदमी अपने को और टोकरी को रस्सी के स्वतंत्र सिरे को खींच कर सम्हालता हो, तो डोरी के ऊर्ध्वाधर से झुकाव की उपेक्षा करके और आदमी और टोकरी के भार को W मान कर, बताओ कि वह रस्सी पर कितना तनाव लगा रहा है ।

यदि रस्सी का स्वतंत्र सिरा भूमि पर लगी हुई एक घिरनी के चारों ओर जाता हो और तब आदमी उसे खींचता हो, तो बताओ वह कितना बल लगाता है ।

६। एक आदमी जिसका भार 12 स्टोन है, 3 हन्डरवेट भार को घिरनियों की उस श्रेणी द्वारा उठा रहा है जिसमें एक ही रस्सी सब घिरनियों

के चारों ओर जाती है और दोनों गुटकों में चार चार घिरनियाँ हैं तथा रस्सी ऊपर के गुटके से बँधी हुई है। घिरनियों के भारों की उपेक्षा करके, बताओ भूमि पर उसका क्या दबाव होगा यदि वह ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर खींचता हो ?

७। हमें बताया गया है कि वह रस्सा, जिससे "ग्रेट पाल" जिसका भार 18 टन है, अपने स्थान पर गिरजे की मीनार के रूप में उठाया गया था, घिरनियों के दोनों गुटकों पर होकर चार चार गुजरा था। इस वाक्य से घिरनियों का वर्णन करो और रस्से की शक्ति का अनुमान करो।

८। घिरनियों की इस श्रेणी में कर्म के सिद्धान्त को सिद्ध करो और वेग-निश्पत्ति मालूम करो।

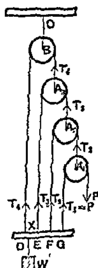
९। एक साधारण 'ब्लाक ऐंड टैकिल' में दो घिरनियाँ नीचे के और दो ऊपर के गुटके में हैं। बताओ 300 पौं० के भार को उठाने में किस बल का प्रयोग करना पड़ेगा ? यदि घर्षण के कारण कोई दिया हुआ बल उस भार का केवल ·45 गुना उठा सके जो वह उस समय उठाता जब घिरनियाँ घर्षणहीन होतीं, तो इष्ट बल मालूम करो।

१०। एक 'ब्लाक ऐंड टैकिल' में वेग-निष्पत्ति 8:1 है। घर्षण इतना है कि लगाये हुये बल का केवल 55% कार्य में आता है। बताओ इसके प्रयोग से कितना बल 5 हण्डरवेट भार को उठायेगा।

१५०—घिरनियों की तृतीय श्रेणी। इसमें सब डोरियाँ भार से लगी होती हैं। सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

इस श्रेणी में किसी भी घिरनी के ऊपर से जाती हुई डोरी का एक सिरा एक दंड से बँधा होता है, जिससे भार लटकाया जाता है, और डोरी का दूसरा सिरा अगली नीचे की घिरनी में लगा होता है। सब से नीचे की घिरनी के ऊपर से जाती हुई डोरी का एक सिरा दंड से बँधा होता है और उसके दूसरे सिरे पर सामर्थ्य लगाया जाता है। इस श्रेणी में सबसे ऊपर की घिरनी नियत होती है।

मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके $A_1, A_2, A_3,$...चल घिरनियाँ हैं और मान लो इनके ऊपर होकर जाती हुई डोरियों के तनाव $T_1, T_2, T_3,$ ..हैं।



यदि सामर्थ्य P है, तो स्पष्टत: $T_1=P$.

(१) मान लो घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं।

चूँकि घिरनियाँ समतुलित हैं, इसलिये सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से

$$T_2=2T_1=2P,$$

$$T_3=2T_2=2^2P,$$

और $$T_4=2T_3=2^3P.$$

और चूँकि दंड जिससे W लटकाया गया है, समतुलित है, इसलिये

$$W=T_1+T_2+T_3+T_4=P+2P+2^2P+2^3P$$

$$=P\frac{2^4-1}{2-1}=P(2^4-1) \quad ... \quad ... \quad (१).$$

यदि घिरनियों की संख्या n है, जिनमें से $(n-1)$ चल हैं, तो इसी प्रकार $W=T_1+T_2+T_3+...+T_n$

$$=P+2P+2^2P+...+2^{n-1}P$$

$$=P\left[\frac{2^n-1}{2-1}\right], \text{ गुणोत्तर श्रेणी को जोड़कर,}$$

$$=P(2^n-1) \quad ... \quad ... \quad ... \quad (2).$$

अत: यांत्रिक लाभ 2^n-1 है।

(२) मान लो सबसे नीचे से आरम्भ करके चल घिरनियों के भार w_1, w_2...हैं।

चूँकि घिरनियाँ समतुलित हैं, इसलिये क्रम से

$$T_2=2T_1+w_1=2P+w_1,$$

$$T_3=2T_2+w_2=2^2P+2w_1+w_2,$$
$$T_4=2T_3+w_3=2^3P+2^2w_1+2w_2+w_3.$$

और चूंकि दंड समतुलित है, इसलिये

$$W=T_4+T_3+T_2+T_1,$$
$$=(2^3+2^2+2+1)P+(2^2+2+1)w_1+(2+1)w_2+w_3$$
$$=\frac{2^4-1}{2-1}\,P+\frac{2^3-1}{2-1}\,w_1+\frac{2^2-1}{2-1}\,w_2+w_3$$
$$=(2^4-1)P+(2^3-1)w_1+(2^2-1)w_2+w_3 \quad \ldots \quad (३).$$

यदि घिरनियों की संख्या n है, जिनमें से $(n-1)$ चल हैं तो इसी प्रकार

$$W=T_n+T_{n-1}+\ldots+T_2+T_1$$
$$=(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots.+1)\ P+(2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots.+1)w_1$$
$$+(2^{n-3}+2^{n-4}+\ldots.+1)w_2+\ldots.+(2+1)w_{n-2}+w_{n-1}$$
$$=\frac{2^n-1}{2-1}P+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}w_1+\frac{2^{n-2}-1}{2-1}w_2+\ldots+\frac{2^2-1}{2-1}w_{n-2}+w_{n-1}$$
$$=(2^n-1)P+(2^{n-1}-1)w_1+(2^{n-2}-1)w_2+\ldots.+(2^2-1)w_{n-2}$$
$$+(2-1)w_{n-1} \quad \ldots.(४).$$

यदि सब घिरनियां बराबर हैं, तो

$$w_1=w_2=\ \ldots..\ =w_{n-1}=w,$$

इसलिये सम्बन्ध (४) निम्न रूप में आ जाता है :—

$$W=(2^n-1)\ P+w[2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots.+2-(n-1)]$$
$$=(2^n-1)\ P+w[2^n-n-1],$$ गुणोत्तर श्रेणी को जोड़ कर।

सम्हालने वाली कड़ी पर दबाव। यह दबाव, सामर्थ्य, भार और घिरनियों के भार से समतुलित होता है, इसलिये यह $P+W+w_1+w_2+\ldots..+w_n$ के बराबर है जो आसानी से ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण। यदि 4 घिरनियाँ हों, जिनके भार सबसे नीचे से आरम्भ करके क्रम से 4, 5, 6, और 7 पौं॰ हो, तो बताओ एक हन्डरवेट भार के पिंड को कितना सामर्थ्य सम्हालेगा ?

पिछली धारा के संकेतों का प्रयोग करके

$$T_2=2P+4,$$
$$T_3=2T_2+5=4P+13,$$
$$T_4=2T_3+6=8P+32.$$

और $$112=T_4+T_3+T_2+P=15P+49.$$

$$\therefore\ P=\frac{63}{15}=4\frac{1}{5}\ \text{पौ० भार ।}$$

१५१—इस श्रेणी में हम देखते हैं प्रत्येक घिरनी का जितना अधिक भार होता है उतना ही कम किसी दिये हुये भार W को सम्हालने के लिये P की आवश्यकता होती है। अतः घिरनियों का भार सामर्थ्य की सहायता करता है। यदि घिरनियों के उचित भार रखे जाँय तो बिना किसी सामर्थ्य के लगाये हुये भी श्रेणी समतुलित रह सकती है।

उदाहरणार्थ, मान लो तीन चल घिरनियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक का भार w है तो पिछली धारा के सम्बन्ध (३) से

$$W=15P+11w.$$

अतः यदि $11w=W$, तो P शून्य हो जाता है, इसलिये समतुलित अवस्था रखने के लिये डोरी के स्वतंत्र सिरे पर किसी भी सामर्थ्य की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

१५२—घिरनियों की तृतीय श्रेणी में, भार w को सम्हालने वाला दंड क्षैतिज नहीं रह सकता जबतक कि वह विन्दु जिस पर भार लटकाया जाता है ठीक से न चुना जाय। किसी विशेष स्थिति में यह विन्दु आसानी से मालूम किया जा सकता है।

धारा १५० के चित्र में मान लो तीन चल घिरनियाँ हैं जिनके भार उपेक्षणीय हैं। मान लो D, E, F और G विन्दुओं के बीच की सभी दूरियाँ क्रम से a हैं, और मान लो वह विन्दु जिसपर भार लटकाया गया है X है।

इसलिये T_1, T_2, T_3 और T_4 का परिणामीबल X से जायगा।

इसलिये घिरनियों के भारों की उपेक्षा करके P द्वारा किया गया कर्म $=15x.P=x(2^4-1)P=x.W$, धारा १५० के समीकरण (१) से, $=$भार W पर किया गया कर्म।

यदि घिरनियों के भारों पर भी विचार करें, तो सामर्थ्य और घिरनियों के भारों द्वारा (जो इस स्थिति में सामर्थ्य की सहायता करते हैं) किया गया कर्म

$=P.15x+w_1.7x+w_2.3x+w_3.x$

$=x[P(2^4-1)+w_1(2^3-1)+w_2(2^2-1)+w_3]$

$=x.W$, धारा १५० के समीकरण (३) से,

$=$भार W पर किया गया कर्म।

यदि घिरनियों की संख्या n हैं तो इसी प्रकार मालूम कर सकते हैं कि P का प्रयोग-बिन्दु उस दूरी का (2^n-1) गुना हट जायगा जो W हटता है, इसलिये वेग-निष्पत्ति 2^n-1 होगी।

उदाहरणमाला २५

१। निम्न प्रश्नों में घिरनियों के भार उपेक्षणीय हैं, उनकी संख्या n है, P सामर्थ्य या 'शक्ति' है और W भार है,

(क) यदि $n=4$ और $P=2$ पौ० भार, तो W मालूम करो।

(ख) यदि $n=5$ और $W=124$ पौ० भार, तो P मालूम करो।

(ग) यदि $W=105$ पौ० और $P=7$ पौ० भार, तो n मालूम करो।

२। निम्न प्रश्नों में सब घिरनियाँ बराबर हैं, और हरएक का भार w है, P सामर्थ्य है और W भार है,

(क) यदि $n=4$, $w=1$ पौ० भार, और $P=10$ पौ० भार, तो W मालूम करो।

(ख) यदि $n=3$, $w=\frac{1}{2}$ पौ० भार, और $W=114$ पौ० भार, तो P मालूम करो।

(ग) यदि $n=5$, $P=3$ पौ० भार, और $W=106$ पौ० भार, तो w मालूम करो।

(घ) यदि $P=4$ पौं० भार, $W=137$ पौं० भार, और $w=\frac{1}{2}$ पौं० भार, तो n मालूम करो।

३। यदि घिरनियो की संख्या 5 हैं, और हर एक का भार 1 पौं० हैं, तो बताओ 3 हण्डरवेट को सम्हालने के लिये कितना सामर्थ्य लगेगा ?

यदि घिरनियाँ आकार मे बराबर हों, तो बताओ छड़ के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

४। यदि 4 बिना भार की घिरनियों के ऊपर से जाती हुई डोरियाँ बिना भार के एक दंड से एक एक इंच की दूरी पर बँधी हों, तो बताओ दंड के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

५। यात्रिक लाभ मालूम करो जबकि घिरनियों की संख्या 4 है, और प्रत्येक का भार लटके हुये भार का $\frac{1}{63}$ है।

६। 3 बिना भार की घिरनियों की श्रेणी मे, जिसमें हर एक डोरी उस दंड से बँधी हुई है जिससे भार लटका हुआ है, यदि हर एक घिरनी का व्यास 2 इंच है, तो बताओ दड के किस बिन्दु से भार लटकाया जाय कि वह क्षैतिज रहे ?

७। यदि सब घिरनियाँ बराबर है और सामर्थ्य घिरनियों में से किसी एक के भार के बराबर है और घिरनियों की सख्या 5 है, तो सिद्ध करो कि भार सामर्थ्य का 57 गुना है।

८। 3 घिरनियों की तृतीय श्रेणी में यदि सब घिरनियों के भार बराबर हैं, तो समतुलित अवस्था में सामर्थ्य का भार के साथ सम्बन्ध मालूम करो। यदि हरएक घिरनी का भार 2 औंस है, तो बताओ केवल घिरनियाँ द्वारा कितना भार सम्हाला जा सकता है ?

यदि सम्हाला गया भार 25 पौं० और सामर्थ्य 3 पौं० भार हो, तो बताओ हर एक घिरनी का भार क्या है ?

९। बिना भार की घिरनियों की तृतीय श्रेणी में भार 70 पौं० सामर्थ्य से सम्हाला जाता है। वह आँकड़ा जिससे कोई एक डोरी भार से बँधी हुई है टूट जाता है और डोरी तब उस घिरनी से बाँध दी जाती

है जिसके ऊपर से वह जा रही थी, और अब भार को सम्हालने के लिये 150 पौं० के सामर्थ्य की आवश्यकता होती हैं। घिरनियों की संख्या और सम्हाला गया भार मालूम करो।

१०। बिना भार की घिरनियों की तृतीय श्रेणी में, यदि अन्तिम घिरनी के ऊपर से जाती हुई डोरी भार से बाँध दी जाय, तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव उस निष्पत्ति में घट जाता है जो घिरनियों की संख्या पर निर्भर रहती है।

यदि तनाव 16 · 15 की निष्पत्ति में घट जाता हो, तो घिरनियों की संख्या मालूम करो।

११। घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें प्रत्येक डोरी भार से बँधी हुई है, यदि हर एक घिरनी का भार w है, और घिरनियों के भार का योग W' है, और P और W क्रम से सामर्थ्य और भार हैं, तो सिद्ध करो कि उसी श्रेणी में $P+w$ सामर्थ्य $W+W'$ भार को सम्हालेगा यदि घिरनियाँ बिना भार की हों।

१२। *यदि भारहीन घिरनियों की संख्या n है और एक डोरी में,* जिसके सिरे P और W भार से बँधे हुये हैं, एक घिरनी फँसा हो जिससे एक भार W' लटका हो, तो P, W और W' के बीच का सम्बन्ध मालूम करो।

१३। यदि घिरनियों की संख्या n है, हर एक का व्यास $2a$ है और भार उपेक्षणीय है, तो सिद्ध करो कि भार के प्रयोग-बिन्दु की सामर्थ्य की क्रिया-रेखा से दूरी $\frac{2^n}{2^n-1}na$ होगी।

(ग) आनत धरातल

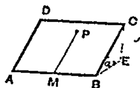
१५५—आनत धरातल, यान्त्रिक शक्ति के विचार से वह दृढ़ धरातल है जो क्षैतिज से किसी कोण पर झुका होता है।

इससे भारी पिंडों के उठाने में सहायता मिलती है।

इस अध्याय में हम केवल धरातल पर रखे हुये उस पिंड की स्थिति

पर विचार करेंगे जिसपर आनत और क्षैतिज धरातलों के छेदन में होकर अर्थात् महत्तमढाल-रेखा से खीचे गये लम्ब धरातल में बल कार्य करते हैं।

विद्यार्थी किसी आनत तल पर महत्तमढाल-रेखा का चित्र अपने सामने निम्न प्रकार खींच सकता है :—कार्ड बोर्ड का एक आयताकार टुकड़ा $ABCD$ लो, और उसे क्षैतिज से कोई कोण बनाते हुये इस प्रकार रखो कि रेखा AB क्षैतिज मेज़ को स्पर्श करे। बोर्ड पर कोई बिन्दु P लो और AB पर PM लम्ब खींचो। P से होकर खीची गई महत्तमढाल की रेखा PM है।



C से AB मे होकर खीचे गये क्षैतिज धरातल पर CE लम्ब खीचो, और BE को मिला दो। रेखाये BC, BE और CE क्रम से आनत धरातल की लम्बाई, आधार और ऊँचाई कहलाती हैं और कोण CBE धरातल का क्षैतिज से झुकाव है।

इस अध्याय में आनत धरातल को चिकना मान लिया गया है, अतः धरातल और पिंड के बीच का प्रतिबल आनत धरातल पर लम्ब है।

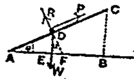
क्योंकि धरातल दृढ है, इसलिये समतुलित अवस्था के लिये इस पर आवश्यकता के अनुसार कितना भी अधिक प्रतिबल हो सकता है।

१५६--दिये हुये भार का एक पिंड एक आनत धरातल पर रखा हुआ है; सामर्थ्य, भार और धरातल पर प्रतिबल के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

मान लो पिंड का भार W, P सामर्थ्य और R धरातल पर प्रतिबल हैं; और मान लो धरातल का क्षैतिज से झुकाव α है।

पहली स्थिति। मान लो सामर्थ्य धरातल पर महत्तमढाल-रेखा पर ऊपर की ओर कार्य करता है।

मान लो AC आनत धरातल है, A से खीची गई क्षैतिज रेखा AB है, DE ऊर्ध्वाधर रेखा है, और मान लो D से खीचा गया धरातल पर लम्ब AB को F पर मिलता है।



$\therefore \angle FDE = 90^\circ - \angle ADE = \angle DAE = a.$

क्योंकि पिंड पर केवल तीन बल कार्य करते हैं, इसलिये लामी के प्रमेय से (धारा८०), हर एक बल शेष दो बलों के बीच के कोणों की ज्याओं के अनुपात में होगा।

$$\therefore \frac{P}{\text{ज्या}\,(R,W)} = \frac{R}{\text{ज्या}\,(W,P)} = \frac{W}{\text{ज्या}\,(P,R)},$$

अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}(180^\circ - a)} = \frac{R}{\text{ज्या}(90^\circ + a)} = \frac{W}{\text{ज्या}\,90^\circ},$$

अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}\,a} = \frac{R}{\text{कोज्या}\,a} = W \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

$\therefore P = W$ ज्या a, और $R = W$ कोज्या a.

सम्बन्ध (१) इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$P : R : W$$

:: धरातल की ऊँचाई : धरातल का आधार : धरातल की लम्बाई।

अन्यथा: W को धरातल और उसकी लम्ब दिशा में विश्लिष्ट किया, तो उसके अवयव भाग DA पर W कोज्या ADE अर्थात् W ज्या a और DF पर W ज्या ADE अर्थात् W कोज्या a हैं:

अत. $P = W$ ज्या a और $R = W$ कोज्या a.

पिंड को A से C तक खींचने में बल P द्वारा किया गया कर्म $P \times AC$ है।

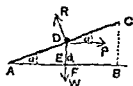
परन्तु $P = W$ ज्या a.

इसलिये कृत-कर्म $= W$ ज्या $a \times AC = W \times AC$ ज्या $a = W \times BC$.

अतः किया गया कर्म वही है जो पिंड के भार को बिना आनत धरातल के हस्तक्षेप के उसी ऊँचाई तक उठाने में किया जाता। अतः कर्म का सिद्धान्त इस स्थिति में भी सही है।

दूसरी स्थिति। मान लो सामर्थ्य चैतिज दिशा में कार्य करता है।

[इस स्थिति में हमें यह अनुमान करना होता है कि धरातल में D पर एक छोटा छेद है जिससे डोरी जाती है और पिंड से बँधी होती है, अथवा पिंड धरातल की ओर एक क्षैतिज बल से ठेला जा रहा है।]



जैसा कि पहली स्थिति में,

$$\frac{P}{\text{ज्या}\,(R,W)}=\frac{R}{\text{ज्या}\,(W,P)}=\frac{W}{\text{ज्या}\,(P,R)},$$

अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}\,(180^\circ-a)}=\frac{R}{\text{ज्या}\,90^\circ}=\frac{W}{\text{ज्या}\,(90^\circ+a)},$$

अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}\,a}=\frac{R}{1}=\frac{W}{\text{कोज्या}\,a} \quad \ldots \quad (१).$$

$\therefore$ $P=W$ स्पज्या a, और $R=W$ व्युकोज्या a.

सम्बन्ध (१) इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$P \cdot R \cdot W$$

:: धरातल की ऊँचाई : धरातल की लम्बाई . धरातल का आधार।

अन्यथा। W के धरातल और उसकी लम्ब दिशा में अवयव भाग W ज्या a और W कोज्या a हैं ; इसी प्रकार P के अवयव भाग P कोज्या a और P ज्या a हैं।

$$\therefore\ P\,\text{कोज्या}\,a=W\,\text{ज्या}\,a,$$

और $$R=P\,\text{ज्या}\,a+W\,\text{कोज्या}\,a=W\left[\frac{\text{ज्या}^2 a}{\text{कोज्या}\,a}+\text{कोज्या}\,a\right]$$

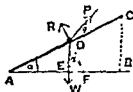
$$=W\frac{\text{ज्या}^2 a+\text{कोज्या}^2 a}{\text{कोज्या}\,a}=W\,\text{व्युकोज्या}\,a.$$

$$\therefore\ P=W\,\text{स्पज्या}\,a,\ \text{और}\ R=W\,\text{व्युकोज्या}\,a.$$

तीसरी स्थिति। मान लो सामर्थ्य आनत धरातल से θ कोण पर कार्य करता है।

लामी के प्रमेय से

$$\frac{P}{\text{ज्या}\,(\widehat{R, W})} = \frac{R}{\text{ज्या}\,(\widehat{W, P})} = \frac{W}{\text{ज्या}\,(\widehat{P, R})},$$



अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}\,(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\text{ज्या}\,(90^\circ + \theta + \alpha)} = \frac{W}{\text{ज्या}\,(90^\circ - \theta)},$$

अर्थात् $$\frac{P}{\text{ज्या}\,\alpha} = \frac{R}{\text{कोज्या}\,(\theta + \alpha)} = \frac{W}{\text{कोज्या}\,\theta}.$$

$$\therefore\ P = W\frac{\text{ज्या}\,\alpha}{\text{कोज्या}\,\theta},\ \text{और}\ R = W\,\frac{\text{कोज्या}\,(\theta+\alpha)}{\text{कोज्या}\,\theta}.$$

अन्यथा : धरातल और उसकी लम्ब दिशा में बलों को विश्लिष्ट करके,

P कोज्या $\theta = W$ ज्या α, और $R + P$ ज्या $\theta = W$ कोज्या α.

$$\therefore\ P = W\frac{\text{ज्या}\,\alpha}{\text{कोज्या}\,\theta},$$

और $$R = W\,\text{कोज्या}\,\alpha - P\,\text{ज्या}\,\theta = W\left[\text{कोज्या}\,\alpha - \frac{\text{ज्या}\,\alpha\,\text{ज्या}\,\theta}{\text{कोज्या}\,\theta}\right]$$

$$= W\frac{\text{कोज्या}\,\alpha\,\text{कोज्या}\,\theta - \text{ज्या}\,\alpha\,\text{ज्या}\,\theta}{\text{कोज्या}\,\theta} = W\,\frac{\text{कोज्या}\,(\alpha+\theta)}{\text{कोज्या}\,\theta}.$$

यदि E से हम EK, P के समानान्तर खींचे जो DF को K पर मिले, तो DEK बल-त्रिभुज होगा, इसलिये

$$P : R : W :: EK : KD : DE.$$

इस प्रकार P और R की आलेख्य-रचना मालूम हो जाती है।

हम देखते हैं कि तीसरी स्थिति में पहली और दूसरी दोनों स्थितियाँ

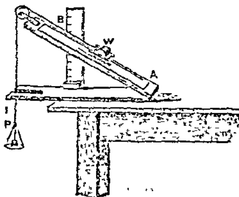
सम्मिलित हैं। यदि हम θ को शून्य के बराबर रखें तो पहली स्थिति निकल आती है, और यदि θ को $(-\alpha)$ के बराबर रखें तो दूसरी स्थिति निकल आती है।

कर्म के सिद्धान्त की जांच। तीसरी स्थिति में मान लो पिंड धरातल पर x दूरी हटता है, तो वह दूरी जो P का प्रयोग-बिन्दु प्रयोग-दिशा की ओर हटेगा x कोज्या θ होगी ; और ऊर्ध्वाधर दूरी जो भार हटेगा x ज्या α होगी।

अतः सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म $P.x$ कोज्या θ है और भार के विपरीत किया गया कर्म $W.x$ ज्या α है। यह ऊपर के सिद्ध किये गये सम्बन्ध के अनुसार बराबर हैं।

१५७—प्रयोग। आनत धरातल पर प्रयोग द्वारा सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

लकड़ी का एक बोर्ड AB लो जो मेज से कसे हुये एक दूसरे बोर्ड से A पर कब्जे द्वारा लगा हुआ है। मान लो AB बोर्ड पर घर्षण को कम करने के लिये शीशे की चादर लगी हुई है। B पर एक नियत ऊर्ध्वाधर अंशांकित मापनी लगी हुई है, जिससे B की A से ऊँचाई आसानी से पढी जा सके।



भार में एक भारी पीतल का रोलर (बेलन) होता है जिसमे एक डोरी बँधी होती है जो एक घिरनी आकर एक पलड़े को थामती

हैं जिसमें भार रखे जा सकते हैं। यह भार पलड़े के भार को मिला कर सामर्थ्य P का काम देते हैं।

घिरनी को इस प्रकार लगाते हैं कि उसके और W के बीच की डोरी धरातल के समानान्तर रहती है।

भुजा AB को किसी उपयुक्त कोण पर लगा दो; पलड़े में इस प्रकार भार रखो कि W ठीक ठीक सम्हल जाय। [व्यवहार मे यह अच्छा होगा यदि P की जगह उन भारो के मानो का औसत लें जो W को क्रमसे ठीक नीचे की ओर जाने देगा और ठीक ऊपर की ओर खींच लेगा।]

B की A से ऊँचाई h और AB की लम्बाई l ध्यान से देखो, तो मालूम होगा कि $\frac{P}{W}=\frac{h}{l}$.

अब बोर्ड को किसी दूसरे कोण पर लगा दो और फिर P, h, l मालूम करो। यही सम्बन्ध फिर भी सही निकलेगा।

यदि बोर्ड की लम्बाई में एक चीर हो जिसमें डोरी जा सके, तो घिरनी को ऐसे स्थान पर लगाया जा सकता है कि डोरी क्षैतिज रहे। इस स्थिति में जैसा कि धारा १५६ की दूसरी स्थिति में है, सामर्थ्य क्षैतिज होगा और

$$\frac{P}{W}=\frac{\text{धरातल की ऊँचाई}}{\text{धरातल का आधार}}।$$

१५८—यदि सामर्थ्य महत्तमढाल-रेखा से खींचे गये ऊर्ध्वाधर धरातल में प्रयोग न करे तो चिकने आनत धरातल पर समतुलित अवस्था नहीं हो सकती है। इस स्थिति में समतुलित अवस्था तब हो सकती है जब आनत धरातल रूश हो। हम इस स्थिति पर अगले अध्याय में विचार करेंगे।

उदाहरणमाला २६

१। कौनसा बल क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ 16 पौं० के भार को एक चिकने धरातल पर समतुलित अवस्था में रख सकता है,

जब धरातल की ऊँचाई 3 फुट और उसके आधार की लम्बाई 4 फुट है, और बताओ धरातल पर प्रतिबल क्या होगा ?

२। एक पिंड एक आनत धरातल पर रखा हुआ अपने भार के आधे बल से जो धरातल के ऊपर की ओर कार्य करता है रुका हुआ है। धरातल का झुकाव क्षैतिज से और उसका प्रतिबल मालूम करो।

३। एक रस्सी, जिसका ऊर्ध्वाधर से झुकाव 30° है, इतनी मजबूत है कि वह एक चिकने धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव 30° है, 180° पौं० के भार को ठीक सम्हाल सकती है। वह लगभग अधिक से अधिक तनाव मालूम करो जो रस्सी पर लगाया जा सकता है।

४। एक पिंड एक धरातल पर रखा हुआ है जिसका क्षैतिज से झुकाव 60° है, और उसे एक बल रोके हुये है जो क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है ; सिद्ध करो कि बल और धरातल का प्रतिबल दोनों पिंड के भार के बराबर हैं।

५। एक पिंड जिसका भार $2P$ है एक आनत धरातल पर एक क्षैतिज बल P से और एक दूसरे बल P से जो धरातल के समानान्तर कार्य करता है समनुलित अवस्था मे रखा हुआ है। धरातल के आधार की उसकी ऊँचाई से निष्पत्ति मालूम करो और धरातल का प्रतिबल भी मालूम करो।

६। एक पिंड एक आनत धरातल पर, जो क्षैतिज से 30° के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ है। उसे एक बल रोके हुये है जो धरातल से 30° का कोण बनाता है, पिंड के भार की बल से निष्पत्ति मालूम करो।

७। एक भार आनत धरातल पर एक बल से रोका गया है जो धरातल से कोई कोण बनाता है ; यदि भार, बल, और प्रतिबल 4:3:2 के अनुपात में हों तो धरातल का झुकाव और बल की दिशा मालूम करो।

८। एक पिंड जिसका भार 5 पौ० है एक चिकने आनत धरातल पर जो क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है रखा हुआ है। पिंड पर दो बल कार्य करते हैं, एक 2 पौ० भार के बराबर है और धरातल के समानान्तर ऊपर की

ओर कार्य करता है और दूसरा P के बराबर है और धरातल से 30° के कोण पर कार्य करता है। P का मान और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

९। वह बल मालूम करो जो किसी आनत धरातल में ऊपर की ओर कार्य करता हुआ 10 पौं० भार के एक पिंड को समतुलित अवस्था में रखता है, जबकि यह दिया हुआ है कि बल, धरातल का प्रतिबल और पिंड का भार समानान्तर श्रेणी में है।

१०। यदि कोई बल P एक आनत धरातल के समानान्तर कार्य करता हुआ और W भार के एक पिंड को सम्हालता हुआ धरातल पर प्रतिबल R उत्पन्न करता है, तो सिद्ध करो कि वह बल क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ और भार R के एक पिंड को सम्हालता हुआ धरातल पर प्रतिबल W उत्पन्न करेगा।

११। 11 और 8 फुट लम्बे दो तख्ते इस प्रकार स्थित हैं कि उनके नीचे के सिरे एक क्षैतिज धरातल पर हैं और ऊपर के सिरे एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, इन तख्तों पर क्रम से W और 12 पौं० भार के दो पिंड रखे हुये हैं और एक डोरी से बंधे हुये हैं जो तख्तों के उभयनिष्ठ शीर्ष से जाती है; W का मान मालूम करो।

१२। क्षैतिज से कोण α बनाती हुई ट्रेम-लाइन की एक ओर कुछ लदे हुये ठेले, जिसमें से प्रत्येक पर एक टन भार लदा हुआ है, लाइन की दूसरी ओर जो क्षैतिज से कोण β बनाती है, संख्या में उतने ही खाली ठेलों से रोके गये हैं। एक ठेले का भार मालूम करो।

१३। एक पिंड एक धरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण α बनाता है। यदि धरातल का प्रतिबल लगाये हुये सामर्थ्य के बराबर है, तो सिद्ध करो कि सामर्थ्य का आनत धरातल से झुकाव $90^\circ - 2\alpha$ है।

१४। एक भारी डोरी इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक भाग किसी दिये हुये आनत धरातल पर है और शेष भाग धरातल के शिखर पर लगी हुई एक छोटी सी घिरनी पर जाकर ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है।

बताओ डोरी का कौन सा बिन्दु घिरनी के ऊपर रखा जाय कि वह समतुलित रहे ?

१५। एक ही ऊँचाई के दो आनत धरातलों पर दो भार क्रम से एक डोरी द्वारा जो धरातलों के उभयनिष्ट शिखर से जाती हैं और उनके समानान्तर हैं, रुके हुये हैं। एक धरातल की लम्बाई उसकी ऊँचाई से दुगनी है, और दूसरे की लम्बाई उसके आधार से दुगनी है। सिद्ध करो कि एक धरातल का प्रतिबल दूसरे धरातल के प्रतिबल से तिगुना होगा।

१६। 50 पौ० भार का एक पिंड चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से $20° 20'$ के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल से रुका हुआ है जो धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता है, लेखा-चित्र द्वारा, अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके बल और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१७। 20 पौ० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से 25° के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल द्वारा जो धरातल से 35° का कोण बनाते हुये कार्य करता है, रोका गया है; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके P और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१८। 30 पौ० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से $28° 15'$ के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक क्षैतिज बल P से रुका हुआ है; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके P और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

(घ) चक्र और धुरी

१५९—इस मशीन में एक मजबूत बेलन अथवा धुरी होती है जिसके सिरों पर A और B दो चूल होते हैं जो नियत आलम्बनों पर बेरोक घूम सकते हैं। धुरी पर दृढ़ता से एक पहिया अथवा चक्र, CD लगा होता है जिसका धरातल धुरी पर लम्ब होता है।

ओर कार्य करता है और दूसरा P के बराबर है और धरातल से 30° के कोण पर कार्य करता है। P का मान और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

९। वह बल मालूम करो जो किसी आनत धरातल में ऊपर की ओर कार्य करता हुआ 10 पौ० भार के एक पिंड को समतुलित अवस्था में रखता है, जबकि यह दिया हुआ है कि बल, धरातल का प्रतिबल और पिंड का भार समानान्तर श्रेणी में है।

१०। यदि कोई बल P एक आनत धरातल के समानान्तर कार्य करता हुआ और W भार के एक पिंड को सम्हालता हुआ धरातल पर प्रतिबल R उत्पन्न करता है, तो सिद्ध करो कि यह बल क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ और भार R के एक पिंड को सम्हालता हुआ धरातल पर प्रतिबल W उत्पन्न करेगा।

११। 11 और 8 फुट लम्बे दो तख्ते इस प्रकार स्थित हैं कि उनके नीचे के सिरे एक क्षैतिज धरातल पर हैं और ऊपर के सिरे एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, इन तख्तों पर क्रम से W और 12 पौ० भार के दो पिंड रखे हुये हैं और एक डोरी से बँधे हुये हैं जो तख्तों के उभयनिष्ठ शीर्ष से जाती है, W का मान मालूम करो।

१२। क्षैतिज से कोण α बनाती हुई ट्रेम-लाइन की एक ओर कुछ लदे हुये ठेले, जिसमें से प्रत्येक पर एक टन भार लदा हुआ है, लाइन की दूसरी ओर जो क्षैतिज से कोण β बनाती है, संख्या में उतने ही खाली ठेलों से रोके गये हैं। एक ठेले का भार मालूम करो।

१३। एक पिंड एक धरातल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से कोण α बनाता है। यदि धरातल का प्रतिबल लगाये हुये सामर्थ्य के बराबर है, तो सिद्ध करो कि सामर्थ्य का आनत धरातल से झुकाव $90^\circ-2\alpha$ है।

१४। एक भारी डोरी इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक भाग किसी दिये हुये आनत धरातल पर है और शेष भाग धरातल के शिखर पर लगी हुई एक छोटी सी घिरनी पर जाकर ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है।

बताओ डोरी का कौन सा बिन्दु घिरनी के ऊपर रखा जाय कि वह समतुलित रहे ?

१५। एक ही ऊँचाई के दो आनत धरातलों पर दो भार क्रम से एक डोरी द्वारा जो धरातलों के उभयनिष्ट शिखर से जाती है और उनके समानान्तर है, रुके हुये हैं। एक धरातल की लम्बाई उसकी ऊँचाई से दुगनी है, और दूसरे की लम्बाई उसके आधार से दुगनी है। सिद्ध करो कि एक धरातल का प्रतिबल दूसरे धरातल के प्रतिबल से तिगुना होगा।

१६। 50 पौ० भार का एक पिंड चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से 20° 20′ के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल से रुका हुआ है जो धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता है; लेखा-चित्र द्वारा, अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके बल और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

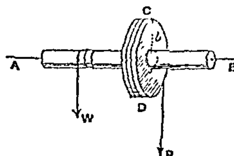
१७। 20 पौ० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से 25° के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक बल द्वारा जो धरातल से 35° का कोण बनाते हुये कार्य करता है, रोका गया है, लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके P और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

१८। 30 पौ० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जो क्षैतिज से 28° 15′ के कोण पर झुका हुआ है, रखा हुआ एक क्षैतिज बल P से रुका हुआ है; लेखा-चित्र द्वारा अथवा त्रिकोणमितीय सारिणी का प्रयोग करके P और धरातल का प्रतिबल मालूम करो।

(घ) चक्र और धुरी

१५९—इस मशीन में एक मजबूत बेलन अथवा धुरी होती है जिसके सिरों पर A और B दो चूल होते हैं जो नियत आलम्बनों पर बेरोक घूम सकते हैं। धुरी पर दृढ़ता से एक पहिया अथवा चक्र, CD लगा होता है जिसका धरातल धुरी पर लम्ब होता है।

धुरी के चारों ओर एक रस्सी लिपटी होती है जिसका एक सिरा



मजबूती से धुरी मे बँधा होता है और उसके दूसरे सिरे पर भार लटकाया जाता है।

चक्र की परिधि के चारों ओर पहली रस्सी के विपरीत दिशा में एक दूसरी रस्सी लिपटी होती है जिसका एक सिरा मजबूती से चक्र से बँधा होता है और जिसके दूसरे सिरे पर सामर्थ्य लगाया जाता है। चक्र की परिधि में नाली बनी होती है ताकि रस्सी फिसलने न पावे।

१६०—सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

धारा ९३ में हम सिद्ध कर आये हैं कि कोई पिंड जो किसी नियत अक्ष पर बेरोक घूम सकता है समतुलित होता है जबकि अक्ष पर बलों के घूर्णों का बीजीय योग शून्य हो। इस स्थिति में जो बल मशीन पर कार्य करते हैं वे सामर्थ्य P और भार W है जिनकी प्रवृत्ति मशीन को विपरीत दिशाओं में घुमाने की होती है। अतः यदि धुरी की त्रिज्या a और चक्र की त्रिज्या b हो, तो समतुलन के नियम से

$$P.\,b = W.\,a \quad \ldots\ldots (१).$$

अतः यांत्रिक लाभ $= \dfrac{W}{P} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{चक्र की त्रिज्या}}{\text{धुरे की त्रिज्या}}$।

कर्म के सिद्धान्त की जांच। मान लो मशीन चार समकोण घूम जाती है। रस्सी का एक भाग जिसकी लम्बाई $2\pi b$ है चक्र से खुल जाता

हैं और इसलिये P यह दूरी उतर आता है। साथ ही साथ $2\pi a$ के बराबर रस्सी का भाग धुरी पर लिपट भी जाता है और इस प्रकार W यह दूरी उठ जाता है। इसलिये P द्वारा किया गया कर्म $=P\times 2\pi b$ और W के विपरीत किया गया कर्म $=W\times 2\pi a$। यह सम्बन्ध (१) से एक दूसरे के बराबर है।

$$\text{वेग-निष्पत्ति (धारा १३७)} = \frac{2\pi b}{2\pi a} = \frac{b}{a} = \text{यांत्रिक लाभ।}$$

१६१—सैद्धान्तिक रूप से $\frac{b}{a}$ राशि को बहुत बड़ा बना कर हम यांत्रिक लाभ को मनचाहा बड़ा बना सक्ते है ; परन्तु व्यवहारिक रूप से इसमें सीमायें है। चूंकि धुरी के नियत आलम्बनों पर दबाव, P और W से समतुलित होता है, इसलिये धुरी की मोटाई अर्थात् $2a$ अनुचित रूप से कम नही की जा सकती अन्यथा धुरा टूट जायगा। न व्यवहार में चक्र की त्रिज्या ही अधिक बढाई जा सकती है, क्योंकि तब मशीन सहज में घुमाने योग्य न रहेगी। अत. यान्त्रिक लाभ के सम्भव मान, एक ओर हमारी मशीन की मजबूती और दूसरी ओर मशीन के आकार को उचित सीमाओं के भीतर रखने की आवश्यकता से सीमित है।

१६२—धारा १६० मे हमने रस्सियों की मोटाई को नगण्य माना था। परन्तु यदि मोटाई, चक्र और धुरी की त्रिज्याओं की तुलना में न छोड़ी जा सके, तो हम यह मान कर कि रस्सियो के तनाव उनके बीचोबीच के तागों पर कार्य करते है, उन पर विचार कर सकते हैं।

मान लो उन रस्सियों की त्रिज्याये जो धुरी और चक्र के चारो ओर जाती हैं क्रमसे x और y हैं ; अब चूलो को मिलानेवाली रेखा से तनाव की क्रिया-रेखाओं की दूरियाँ क्रमसे $(a+x)$ और $(b+y)$ है। अतः समतुलन के नियम से

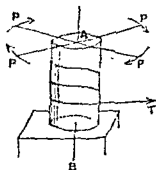
$$P(b+y)=W(a+x),$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{\text{धुरी और रस्सी की त्रिज्याओ का जोड}}{\text{चक्र और रस्सी की त्रिज्याओं का जोड़}}।$$

१६३—चक्र-धुरी के दूसरे रूप 'विण्डलैस', जिसका प्रयोग कुएँ से पानी खींचने में होता है, और 'कैप्सटन' है जो जहाज पर काम में आता है। इन मशीनों में सामर्थ्य धुरी अथवा बेलन के चारों ओर लिपटी हुई रस्सी द्वारा लगाये जाने के बजाय जैसा कि धारा १५९ में है, धुरी पर लगे हुये लम्ब आरों के सिरों पर लगाया जाता है।

'विण्डलैस' में धुरा क्षैतिज होता है और 'कैप्सटन' में ऊर्ध्वाधर।

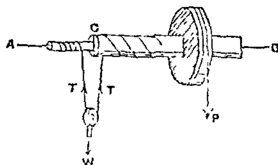
'कैप्सटन' में प्रति-चल धुरी के चारों ओर लिपटी हुई रस्सी का तनाव T होता है, और सामर्थ्य में वे बल होते हैं जो धुरी के बिन्दु *A* पर साकेट में लगी हुई छड़ों के सिरों पर लगाये जाते हैं। भुजाओं के जोड़ों से यह लाभ होता है कि 'कैप्सटन' के दिगमान पर दबाव बहुत कम अथवा नष्ट हो जाता है। समतुलन के नियम धारा १६० की भाँति निकाले जा सकते हैं।



१६४—अन्तरीय चक्र और धुरी। साधारण चक्र और धुरी का थोड़ा परिवर्तित रूप अन्तरीय चक्र और धुरी है। इस मशीन की धुरी में दो बेलन होते हैं जिनका एक ही अक्ष होता है और जो सिरों पर एक दूसरे से जुड़े होते हैं। दोनों बेलनों की त्रिज्यायें भिन्न-भिन्न होती हैं। रस्सी का एक सिरा इन बेलनों में से एक के चारों ओर लिपटा होता है और दूसरा सिरा दूसरे बेलन के चारों ओर विपरीत दिशा में लिपटा होता है। रस्सी के ढीले भाग से एक घिरनी लटकी होती है जिससे भार लटकाया जाता है। रस्सी का वह भाग जो छोटे बेलन के चारों ओर लिपटा होता है उसमें मशीन को सामर्थ्य की ही दिशा में घुमाने की प्रवृत्ति होती है।

पहले की भाँति मान लो कि चक्र की त्रिज्या b है और धुरी के AC और CB भाग की त्रिज्यायें a और c हैं, जिनमें a छोटी है।

चूँकि घिरनी चिकनी है, इसलिये उसके चारों ओर जाने वाली डोरी का तनाव T पूरी लम्बाई भर वही रहता है, और इसलिये भार की समतुलित अवस्था में $T=\frac{1}{2}W$.



यदि मशीन समतुलित अवस्था में है, तो रेखा AB पर घूर्ण लेकर

$$P.b+T.a=T.c$$

$$\therefore\ P=T\frac{c-a}{b}=\frac{W}{2}\frac{c-a}{b}.$$

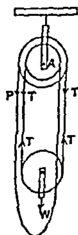
अत. यांत्रिक लाभ $=\frac{W}{P}=\frac{2b}{c-a}.$

धुरी के दोनों भागों की त्रिज्याओं c और a को लगभग बराबर बना कर हम यांत्रिक लाभ को बिना मशीन को कमजोर किये हुये, बहुत अधिक बना सकते हैं।

१६५—वेस्टन की अन्तरीय घिरनी। इस मशीन में दो गुटके होते हैं; ऊपर के गुटके में लगभग एक ही आकार की दो घिरनियाँ होती हैं जो एक साथ एक घिरनी की तरह घूमती हैं; नीचे के गुटके में एक घिरनी होती है जिससे भार लटकाया जाता है।

चित्र मशीन के परिच्छेद को प्रदर्शित करता है। एक बिना छोर की जंजीर पहले ऊपर की घिरनियों में से बड़ी पर से जाती है फिर नीचे,

की घिरनी के नीचे से ऊपर की छोटी घिरनी के ऊपर जाती है। जंजीर का शेष भाग ढीला लटका रहता है और जंजीर के पहले भाग से मिला होता है। सामर्थ्य P इस प्रकार लगाया जाता है जैसा चित्र में दिखलाया गया है। जंजीर ऊपर की घिरनियों के पृष्ठों पर छोटे छोटे बहिर्गत भागों अथवा घिरनियों में गड्ढों द्वारा जिनमें जंजीरों की कड़ियाँ ठीक ठीक फिट हो जाती हैं फिसलने से रोकी जाती है।



यदि जंजीर के उन भागों का तनाव जो भार W को सम्हालते हैं T हो, तो चूंकि यह भाग लगभग ऊर्ध्वाधर हैं, तथा जजीर और नीचे की घिरनियों के भारों की उपेक्षा की जा सकती है, $2T = W$ ... (१).

यदि ऊपर के गुटके की बड़ी और छोटी घिरनियों की त्रिज्यायें R और r हैं, तो ऊपर के गुटके के केन्द्र A पर घूर्ण लेकर

$$P\,R + T.\,r = T.\,R.$$

अत.
$$P = T\frac{R-r}{R} = \frac{W}{2}\,\frac{R-r}{R}.$$

इसलिये मशीन का यान्त्रिक लाभ $= \dfrac{W}{P} = \dfrac{2R}{R-r}$.

क्योंकि R और r लगभग बराबर हैं अत यह यांत्रिक लाभ बहुत अधिक है।

अन्तरीय चक्र और धुरी में किसी भार को अधिक दूरी तक उठाने में बहुत रस्सी की आवश्यकता होती है। यह असुविधा अन्तरीय घिरनी में नहीं होती है।

उदाहरणमाला २७

१। यदि चक्र और धुरी की त्रिज्यायें क्रम से 2 फुट और 3 इंच हैं तो बताओ 56 पौं० भार को उठाने में कितना सामर्थ्य लगाना पड़ेगा।

२। यदि चक्र और धुरी की त्रिज्यायें क्रम से 30 इंच और 5 इंच हों तो बताओ 20 पौं० भार का बल कितना भार सम्हाल सकेगा। धुरी का आलम्बनों पर दबाव भी मालूम करो।

यदि प्रत्येक रस्सी की मोटाई एक इंच है, तो अब कितना भार सम्हाला जा सकेगा ?

३। यदि एक चक्र और धुरी के द्वारा 3 पौं० का एक बल 30 पौं० के भार को सम्हालता है और यदि धुरी की त्रिज्या 2 इंच है तो चक्र की त्रिज्या मालूम करो।

४। एक कैप्सटन की धुरी का व्यास 16 इंच है और उसमें 8 छड़ें हैं। बताओ उसके अक्ष से कितनी दूर पर 8 आदमी, प्रत्येक आदमी एक एक छड़ पर $26\frac{1}{4}$ पौं० बल का प्रयोग करके धक्का लगाये कि मशीन में एक टन भार को उठाने का पर्याप्त प्रतिरोध पैदा हो जाय।

५। चार मल्लाह एक कैप्सटन द्वारा, जिसकी त्रिज्या 4 इंच है और जिसके आरों की लम्बाई 6 फुट है, एक लंगर उठा रहे हैं। यदि हर एक आदमी 112 पौं० भार का बल लगाता है तो लंगर का भार मालूम करो।

६। चार चक्र और धुरे, जिसमें से हर एक में त्रिज्याये 5 : 1 की निष्पत्ति में है इस प्रकार रखे गये हैं कि प्रत्येक धुरी की परिधि दूसरे चक्र की परिधि से लगी हुई है। बताओ 1875 पौं० के भार को सम्हालने में कितनी सामर्थ्य की आवश्यकता होगी ?

७। किसी चक्र और धुरी की त्रिज्याये क्रम से 2 फुट और 2 इंच हैं, और उनसे लटकती हुई डोरियाँ एक सम दंड जिसकी लम्बाई 2 फुट 2 इंच और भार 10 पौं० है, के सिरों से बँधी हुई हैं। बताओ एक डोरी से कौन सा भार लटकाया जाय कि दंड क्षैतिज रहे।

८। चक्र और धुरी की डोरी के ऊर्ध्वाधर पाश में लटकती हुई एक घिरनी एक हन्डरवेट भार को सम्हाले हुये हैं। डोरी का एक सिरा धुरी के चारों ओर और दूसरा सिरा उसके विपरीत दिशा में चक्र के चारों ओर

लिपटा हुआ है। यदि चक्र और धुरी की त्रिज्यायें क्रमसे 1 फुट और 2 इंच हैं तो उस सामर्थ्य को मालूम करो जो 2 फ़ुट लम्बी भुजा के सिरे पर कार्य करके और धुरी को घुमा कर भार को सम्हाल सके।

९। अन्तरीय चक्र और धुरी में यदि चक्र की त्रिज्या 1 फ़ुट है और धुरी के दोनो भागों की त्रिज्यायें क्रम मे 5 और 4 इंच है, तो बताओ कौन सा सामर्थ्य 56 पौं० के भार को सम्हाल सकेगा ?

१०। अन्तरीय चक्र और धुरी में, यदि चक्र की त्रिज्या 18 इंच है और धुरी के दोनो भागो की त्रिज्याये क्रम से 6 और 4 इंच है, तो बताओ 20 पौ० का सामर्थ्य किस भार को रोक सकेगा ?

११। एक चक्र धुरी मे चक्र की त्रिज्या 1 फुट और धुरी की त्रिज्या 1 इंच है ; यदि दस दस पौं० के दो भार चक्र के दो किनारों पर इस प्रकार बांध दिये जायें कि उनको मिलाने वाली रेखा चक्र के केन्द्र पर 120° का केन्द्र बनाये , तो बताओ धुरी मे लटकती हुई डोरी बड़ा से बड़ा कौन सा भार सम्हाल सकती है।

१२। एक चक्र धुरी मे यदि चक्र की त्रिज्या धुरी की त्रिज्या से छः गुनी है, और यदि 5 पौ० भार के सामर्थ्य मे कोई पिंड 50 फुट उठाया जा सकता है, तो बताओ कितना कर्म व्यय होगा।

१३। एक कैप्सटन, जिसका व्यास 20 इंच है, एक लीवर द्वारा कार्य मे लाया जाता है। लीवर की लम्बाई कैप्सटन के अक्ष मे 5 फ़ुट है। बताओ एक टन भार के एक पिंड को चिकने धरातल पर, जो क्षैतिज से कोज्या$^{-1}\frac{4}{5}$ का कोण बनाता है, 35 फुट ऊपर की ओर एक रस्सी द्वारा खींचने में कितना कर्म करना पड़ेगा। लीवर के सिरे पर लगाया गया बल भी मालूम करो और वह दूरी भी बताओ जो प्रयोग-विन्दु चलता है।

१४। अन्तरीय चक्र धुरी और वेस्टन के अन्तरीय चक्र मे कर्म के सिद्धान्त की जाँच करो और प्रत्येक अवस्था में वेग-निष्पति मालूम करो।

(च) साधारण तुला (तराजू)

१६६—साधारण तुला (तराजू) में एक दृढ़ दंड AB (धारा १६७) होता है, जिसके प्रत्येक सिरे पर एक पलड़ा लटका होता है, और जो दंड के बाहर एक आलम्ब O के चारों ओर बेरोक घूम सकता है। आलम्ब और दंड एक दूसरे में दृढ़तापूर्वक जुड़े होते हैं, और यदि तुला ठीक से बनी हो, तो O बिन्दु पर सख्त फौलाद की एक खूंटी होती है जिसका सिरा नीचे की ओर झुका होता है और एक छोटे से प्लेट पर टिका रहता है।

जिस पिंड को तोलना होता है उसे एक पलड़े में रखते हैं और दूसरे पलड़े में ज्ञात परिमाण के भार रखे जाते हैं। इन भारों को इस प्रकार रखते हैं कि तुला क्षैतिज अवस्था में रहे। यदि OH दंड पर लम्ब हो और भुजा HA और HB की लम्बाइयां बराबर हों और यदि दंड का गुरुत्व-केन्द्र OH रेखा में हो, और पलड़ों के भार बराबर हों, तो पिंड का भार दूसरे पलड़े में रखे हुये भारों के योग के बराबर होता है।

यदि पिंड का भार दूसरे पलड़े में रखे हुये भारों के योग के बराबर नहीं है, तो तुला का दंड क्षैतिज अवस्था में नहीं रहेगा परन्तु क्षैतिज से झुका रहेगा।

अच्छी तुलाओं में दंड के बिन्दु H पर बहुधा एक लम्बा प्वाइंटर लगा होता है। इस प्वाइंटर का सिरा एक अंशांकित पटरी पर घूमता है, और जब दंड क्षैतिज अवस्था में होता है तो प्वाइंटर ऊर्ध्वाधर हो जाता है और पटरी शून्य को सूचित करती है।

१६७—किसी तुला की समतुलित अवस्था मालूम करना जबकि पलड़ों में रखे हुये भार बराबर नहीं हैं।

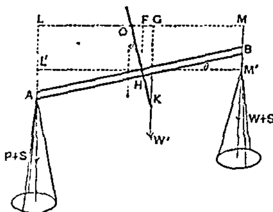
मान लो पलड़ों में रखे हुये भार P और W हैं, जिनमें से पहला बड़ा है, और प्रत्येक पलड़े का भार S है, और मान लो कि दंड और उससे दृढ़ता पूर्वक लगे हुये भागों का भार W' है जो OH के किसी बिन्दु K पर कार्य करता है।

[चित्र अनुपातानुरूप नहीं खींचा गया है ताकि बिन्दु स्पष्ट रूप से दिखलाये जा सकें ; वास्तव में K दंड के अत्यन्त निकट होना है।]

मान लो समतुलित अवस्था में दंड क्षैतिज से θ कोण बनाता है, इसलिये OH ऊर्ध्वाधर से वही θ कोण बनायेगा।

मान लो OH और OK क्रम से h और k हैं, और मान लो AH अथवा HB की लम्बाई a है।

मान लो O और H से खींची गई क्षैतिज रेखायें दंड के सिरों A और B से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखाओं को क्रम से L, M, L' और M' बिन्दुओं



पर मिलती हैं। और मान लो कि H और K से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखायें LM को क्रम से F और G पर मिलती हैं।

जब तुला समतुलित अवस्था में होती है, तो O पर बलों के घूर्ण समतुलित होंगे।

$$\therefore\ (P+S).OL=(W+S)OM+W'.OG,$$

अर्थात्, $(P+S)(FL-FO)=(W+S)(FM+OF)+W'.\,OG,$

$$\therefore\ (P+S)(a\text{ कोज्या }\theta-h\text{ ज्या }\theta)=(W+S)(a\text{ कोज्या }\theta+h\text{ ज्या }\theta)$$
$$+W'.\,k\text{ ज्या }\theta.$$

[क्योंकि $OF = OH$ कोज्या $FOH = h$ ज्या θ; $OG = OK$ ज्या θ; और $FL = HL' = a$ कोज्या θ.]

$\therefore$ a कोज्या $\theta(P - W)$ = ज्या θ $[WK + (P + W + 2S)h]$.

$$\therefore \text{ स्पज्या } \theta = \frac{(P - W)a}{WK + (P + W + 2S)h}.$$

१६८—अच्छे तुला के आवश्यक गुण ।

(१) तुला सही होनी चाहिये ।

यह उस दशा में होगा जब तुला की भुजायें बराबर हों, पलड़ों के भार बराबर हों, और दंड का गुरुत्व-केन्द्र आलम्ब से दंड पर डाले गये लम्ब पर हो . क्योंकि इस अवस्था में दंड क्षैतिज रहेगा यदि बराबर भार पलड़ों में रखे जांय ।

इस बात की जांच करने के लिये कि तुला सही है अथवा नहीं पहले यह देखो कि जब पलड़ा खाली हो तो दंड क्षैतिज रहता है कि नहीं । फिर एक पलड़े में रखे हुये पिंड को समतुलित करने के लिये दूसरे पलड़े में पर्याप्त भार रखो ताकि दंड क्षैतिज हो जाय । अब पिंड और भारों को अदल बदल दो । यदि अब भी वे एक दूसरे से समतुलित रहे तो तुला सही है और यदि दूसरी अवस्था में दंड ऊर्ध्वाधर से झुक जाता है तो तुला सही नहीं है ।

(२) तुला सूक्ष्मग्राही होनी चाहिये, अर्थात् पलड़ों में रक्खे हुये भारों के थोड़े से ही कम अन्तर के लिये दंड क्षैतिज से काफी झुका रहना चाहिये ।

P और W के बीच के किसी निर्दिष्ट अन्तर के लिये दंड का क्षैतिज से जितना अधिक झुकाव होगा उतनी ही अधिक तुला सूक्ष्मग्राही होगी ; और किसी निर्दिष्ट झुकाव θ के लिये जितना कम भारों के बीच में अन्तर होगा उतनी ही अधिक तुला सूक्ष्मग्राही होगी ।

अतः जब $P - W$ दिया हुआ हो, तो सूक्ष्मग्राहिता बढ़ती है जब θ बढ़ता है और इसलिये जब स्पज्या θ भी बढ़ती है ; और जब θ दिया हुआ हो, तो वह $\frac{1}{P - W}$, के साथ परिणमित होती है ।

इसलिये सूक्ष्मग्राह्यता लगभग $\frac{\text{स्पज्या } \theta}{P-W}$,

अर्थात् $\frac{a}{W'K+(P+W+2S)h}$ (धारा १६७) से नापी जाती है।

अतः तुला की सूक्ष्मग्राह्यता अधिक होगी यदि h और k की अपेक्षा भुजा a काफी लम्बी हो और दंड का भार W' तुला की लम्बाई और दृढता ध्यान में रखते हुये जितना सम्भव हो कम से कम हो।

यदि h शून्य नहीं है, तो सूक्ष्मग्राह्यता P और W अर्थात् पलड़ों में रखे हुये भारों के मानों पर निर्भर रहती है। रासायनिक प्रयोगशाला में जिन तुलाओं का प्रयोग होता है उनमें यह बात नहीं चाही जाती है। ऐसी तुलाओं में h शून्य होता है अर्थात् चित्र में बिन्दु O, K पर पड़ता है। इस अवस्था में सूक्ष्मग्राह्यता O अथवा H के नीचे दंड के गुरुत्व-केन्द्र की दूरी, K के साथ, उत्क्रमतः परिणमित होती है।

परन्तु h और k दोनों शून्य नहीं होने चाहिये, क्योंकि तब दोनों बिन्दु O और K, H पर पड़ेंगे। ऐसी अवस्था में जब पलड़ों में भार बराबर होंगे तो, जैसा कि धारा १४४ में देख आये हैं, तुला किसी भी अवस्था में समतुलित रह सकती है, अथवा यदि पलड़ों में भार बराबर न हों तो तुला ऊर्ध्वाधर से जितना सम्भव है, उतना निकट आ जायगी।

(३) तुला स्थायी होनी चाहिये और शीघ्रता से उसे समतुलित अवस्था में आजाना चाहिये।

तुला को समतुलित अवस्था में आने के समय का निर्णय करना वास्तव में गत्यात्मक प्रश्न है। तथापि हम यह मान सकते हैं कि यह नियम उस समय भली प्रकार सन्तुष्ट हो जाता है जब आलम्ब O पर बलों के घूर्ण महत्तम हों। जब प्रत्येक पलड़े में भार P है, तो उन बलों के घूर्ण जो तुला को समतुलित अवस्था में लाने का प्रयास करते हैं

$$=(P+S)\,(a \text{ कोज्या } \theta+h \text{ ज्या } \theta)-(P+S)\,(a \text{ कोज्या } \theta-h \text{ ज्या } \theta)$$
$$+W'.k \text{ ज्या } \theta$$

$=[2(P+S)h+W'.k]$ ज्या θ.

यह व्यंजक उस समय महत्तम होगा जब h और K बड़े से बड़े हों।

चूँकि तुला अधिक से अधिक तब सूक्ष्मग्राही होती है जब h और k छोटे होते हैं, और अधिक से अधिक तब स्थायी होती है जब यह बड़े होते हैं, अतः हम देखते हैं कि किसी तुला में अधिक सूक्ष्मग्राह्यता और शीघ्रता से तौलना कुछ परिमाण तक विरोधी होते हैं। व्यवहार में यह इतना आवश्यक नहीं है क्योंकि उन तुलाओं में जिनमें सूक्ष्मग्राह्यता की आवश्यकता होती है (जैसा कि उन तुलाओं में जिनका प्रयोग प्रयोगशालाओं में होता है) हम शीघ्रता से तौलने का ध्यान छोड़ सकते हैं ; इसके विपरीत वे तुलायें हैं जिनका साधारण व्यापार में प्रयोग होता है।

तुलाओं में जहां तक सम्भव हो सके दोनों गुण, सूक्ष्मग्राह्यता और शीघ्रता से तौलना, रखने के लिये उनकी भुजायें हल्की और लम्बी होनी चाहिये और साथ ही दंड से आलम्ब की दूरी भी अधिक रहनी चाहिये।

१६९—द्विक तोलन। इस रीति से यदि तुला सही नहीं है तो भी किसी पिंड का भार ठीक ठीक निकाला जा सकता है।

जिस पिंड को तौलना हो उसे एक पलड़े में रखो और दूसरे पलड़े में रेत अथवा कोई और ऐसी ही उपयुक्त वस्तु रखो जो पिंड से समतुलित हो जाय। फिर पिंड को हटा दो और उसके स्थान पर ज्ञात भार रखो जो रेत से फिर समतुलित हो जाय। अब पिंड का भार इन ज्ञात भारों के योग के बराबर होगा।

इस रीति का प्रयोग अच्छी से अच्छी तुलाओं में भी किया जाता है जब अत्यन्त शुद्धता की आवश्यकता होती है। इसे बोरदा की रीति कहते हैं।

१७०—उदाहरण १। एक तुला की भुजायें लम्बाई में बराबर हैं परन्तु दंड का गुरुत्वकेन्द्र उसके मध्य-बिन्दु पर नहीं है। यदि एक पिंड क्रमशः प्रत्येक पलड़े में रखकर तौला जाय, तो सिद्ध करो कि उसका वास्तविक भार प्रतीयमान भारों का समान्तर मध्यमान होगा।

मान लो भुजाओं की लम्बाई a है, और दंड के गुरुत्व-केन्द्र की आलम्ब से क्षैतिज दूरी x है।

मान लो एक पिंड का भार, जिसका वास्तविक भार W है, तौलने पर क्रमशः W_1 और W_2 प्रतीत होता है।

यदि दड का भार W' है, तो

$$W a = W'.x + W_1.a,$$

और $$W_2.a = W'.x + W.a.$$

अतः घटा कर,

$$(W - W_2)\, a = (W_1 - W)a$$

$$\therefore\ W = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)$$

= प्रतीयमान भारों का समान्तर मध्यमान।

उदाहरण २। एक तुला की भुजाय लम्बाई में बराबर नहीं हैं, परन्तु जब पलड़ों में कोई भार न रखा हो तो दंड क्षैतिज रहता है; सिद्ध करो यदि एक पिंड क्रमश. प्रत्येक पलडे में रखा जाय तो उसका वास्तविक भार प्रतीयमान भारों का गुणोत्तर मध्यमान होगा। [गास की विधि]

यह भी सिद्ध करो कि यदि एक दूकानदार एक ही वस्तु के बराबर परिमाण को प्रत्येक पलडे का क्रमशः प्रयोग करके तौले, तो वह ठगा जायगा।

क्योंकि जब पलड़ों में कोई भार नहीं होते हैं, तो दंड क्षैतिज रहता है, अत. दंड और पलड़ों का गुरुत्व-केन्द्र आलम्ब के ऊर्ध्वाधर नीचे होगा।

मान लो दंड की लम्बाइयाँ a और b हैं और मान लो एक पिंड का भार जिसका वास्तविक भार W है, तौलने पर क्रमशः W_1 और W_2 प्रतीत होता है।

अत $$W.a = W_1 b \qquad \dots \qquad (१),$$

और $$W_2.a = W.b \qquad \dots \qquad (२).$$

अतः गुणा करके $W^2.ab = W_1 W_2.ab,$

$$\therefore\ W = \sqrt{W_1 . W_2},$$

अर्थात् वास्तविक भार प्रतीयमान भारों का गुणोत्तर मध्यमान है।

अब यदि दूकानदार एक ही वस्तु को, जो परिमाण में W है, दोनों पलड़ों में क्रमशः तौले तो वास्तव में वह अपने ग्राहकों को परिमाण में W_1+W_2 देगा।

इसलिये $$W'_1+W_2-2W=W\frac{a}{b}+W\frac{b}{a}-2W$$
$$=W\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=W\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

अब a और b के मान चाहे जो हों, इस समीकरण का दायाँ पक्ष हमेशा धन होगा इसलिये W_1+W_2 हमेशा $2W$ से अधिक होगा। अत. दूकानदार ठगा जाता है।

सांख्यिक उदाहरण। यदि भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रम से 11 और 12 इंच हैं और प्रत्येक दशा में प्रतीयमान भार 66 पौंड हैं, तो वास्तविक भार $\frac{11}{12}$.66 और $\frac{12}{11}$.66 अर्थात् 60½ और 72, अर्थात् 132½ पौं० होगा, इसलिये दूकानदार को ½ पौं० का घाटा होगा।

उदाहरण ३। यदि किसी तुला का गुरुत्व-केन्द्र उसके दंड के मध्य-बिन्दु पर नहीं है और यदि एक दूकानदार किसी ग्राहक के किसी वस्तु के $2W$ परिमाण को बराबर बराबर मात्रा में दोनों पलड़ों से तौल कर देता है, तो सिद्ध करो कि यदि दंड का गुरुत्व-केन्द्र बड़ी भुजा में है तो वह ठगा जायगा।

मान लो भुजाओं की लम्बाइयाँ a और b हैं; और मान लो कि तुला का भार W' भुजा b के एक बिन्दु पर जो आलम्ब से x की दूरी पर है कार्य करता है। मान लो एक पिंड जिसका भार W है, क्रम से दोनों पलड़ों में रख कर तौलने में W_1 और W_2 प्रतीत होते हैं, तो

$$W.a=W_1.b+W'.x,$$

और $$W_2.a=W.b+W'.x.$$

$$\therefore W_1+W_2-2W=\frac{W.a-W'.x}{b}+\frac{W.b+W'.x}{a}-2W$$
$$=\frac{W(b-a)^2}{ab}+W'\frac{b-a}{ab}x.$$

यदि $b>a$, तो इस समीकरण का दायाँ पक्ष धन है और $W_1+W_2>2W$, अतः यदि दंड का गुरुत्व-केन्द्र बड़ी भुजा में है तो दूकानदार ठगा जायगा।

उदाहरणमाला २८

१। एक तुला में केवल यही दोष है कि उसके पलड़ों के भार बराबर नहीं हैं, तो बताओ उस पिंड का वास्तविक भार क्या है जो 10 पौं० भार से एक पलड़े में और 12 पौं० भार से दूसरे पलड़े में समतुलित हो ?

२। एक तुला की भुजायें क्रमसे 8½ और 9 इंच लम्बी है। जिस वस्तु का भार मालूम करना है वह बड़ी भुजा से लटकाई गई है, तो बताओ वस्तु का वास्तविक भार क्या है जब उसका प्रतीपमान भार 27 पौं० है।

३। साधारण तुला का एक पलड़ा इस प्रकार लदा हुआ है कि उस पिंड का प्रतीपमान भार, जिसका वास्तविक भार 18 औंस है, 20 औंस है। वह भार मालूम करो जिससे पलड़ा लदा हुआ है।

४। किसी वस्तु के प्रतीपमान भार, जब तुला की दोनों भुजाओं से क्रमश. तौले जाते हैं, तो 9 और 4 पौं० पाये जाते हैं। भुजाओं की लम्बाइयों में निष्पत्ति और वस्तु का वास्तविक भार मालूम करो।

५। एक पिंड जब एक पलड़े में रखा जाय तो 24 पौं० तुलता प्रतीत होता है और जब दूसरे पलड़े में रखा जाय तो वही 25 पौं० तुलता प्रतीत होता है। यह मान कर कि तुला की भुजायें बराबर नहीं हैं पिंड का वास्तविक भार दशमलव के तीन अंकों तक मालूम करो।

६। एक तुला के पलड़े A में रखा हुआ सीसे का एक टुकड़ा दूसरे पलड़े B में रखे हुये 100 ग्रेन से समतुलित होता है। जब उसी टुकड़े को पलड़े B में रख देते हैं तो वह A में रखे हुये 104 ग्रेन से समतुलित होता है। बताओ तुला की भुजाओं में क्या निष्पत्ति है ?

७। एक पलड़े में रखा हुआ एक पिंड दूसरे पलड़े में रखे हुये 10 पौं० से समतुलित होता है। जब पिंड और भारों के स्थानों को

अदल बदल देते हैं तो पिंड से समतुलित होने के लिये 11 पौंड की आवश्यकता होती है। यदि छोटी भुजा की लम्बाई 12 इंच है तो बड़ी भुजा की लम्बाई और पिंड का भार मालूम करो।

८। एक हल्की भ्रमात्मक तुला की भुजायें 10 : 9 की निष्पत्ति में हैं। यदि सामान क्रम से दोनों भुजाओं से तौला जाय तो सिद्ध करो कि बेचने वाले को $\frac{5}{9}$ प्रतिशत का घाटा होगा।

९। यदि एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें क्रम से 8 और 9 इंच लम्बी हैं, तो बताओ कि एक आदमी को दो शिलिंग प्रति पौंड की चाय के लिये वास्तविक मूल्य क्या देना पड़ेगा जबकि चाय (१) बड़ी, (२) छोटी भुजा के सिरे से तौली जाय।

१०। एक व्यापारी के भार सही हैं, परन्तु उसकी तुला की एक भुजा दूसरी से $\frac{1}{20}$ छोटी है। यदि वह किसी औषधि को दो बराबर बराबर परिमाणों में, जिनमें से प्रत्येक का प्रतीयमान भार $9\frac{1}{2}$ पौं० है 40 शि० प्रति पौंड की दर से एक बार एक पलड़े में रख कर और दूसरी बार दूसरे पलड़े में रखकर तौल कर बेचे, तो बताओ उसे क्या लाभ अथवा हानि होगी।

११। एक तुला में जब बराबर बराबर भार रखे जाते हैं तो दंड क्षैतिज नहीं रहता है। यह भी मालूम नहीं है कि तुला की भुजायें बराबर हैं अथवा नहीं और न यह ही मालूम है कि पलड़ों के भार बराबर हैं अथवा नहीं। एक पलड़े में रखे हुये 51·075 ग्रेन दूसरे पलड़े में रखे हुये 51·362 ग्रेन से और 25·592 ग्रेन 25·879 ग्रेन से समतुलित होते हैं। सिद्ध करो कि तुला की भुजायें बराबर हैं परन्तु पलड़ों के भारों में ·287 ग्रेन का अन्तर है।

१२। एक साधारण तुला में P और Q एक दूसरे से समतुलित है। उनके स्थानों को अदल बदल देने से ज्ञात होता है कि समतुलित अवस्था रखने के लिये हमें Q में उसका एक सौवाँ भाग और जोड़ना चाहिये। भुजाओं में और P और Q में निष्पत्तियाँ मालूम करो।

१३। एक मिथ्या तुला का एक पलड़ा लदा हुआ है। यदि एक पिंड

को क्रमशः दोनों पलड़ों में रखकर तोलें तो उसका भार P और Q प्रतीत होता है। पलड़े में लदा हुआ भार और पिंड का वास्तविक भार मालूम करो।

१४। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें बराबर नहीं हैं और एक पलड़ा लदा हुआ है। एक पिंड जिसका वास्तविक भार P पौ० है, एक पलड़े में w पौ० और दूसरे पलड़े में w' पौ० तुलता हुआ प्रतीत होता है। भुजाओं में निष्पत्ति मालूम करो और वह भार भी मालूम करो जिससे पलड़ा लदा हुआ है।

१५। एक लदी हुई तुला में जिसकी भुजायें बराबर नहीं हैं, P तौल में Q, और Q तौल में R प्रतीत होता है; बताओ तौल में R क्या प्रतीत होगा।

१६। एक लम्बे टक के आकार का एक लकड़ी का टुकड़ा जिसकी चौड़ाई समान है और जिसका एक सिरा $\frac{1}{2}$ इंच और दूसरा सिरा $\frac{1}{4}$ इंच मोटा है, गुरुत्व-केन्द्र से लटका हुआ है और एक तुला के दंड का काम दे रहा है। तौलने वाले सामान को लम्बी भुजा से लटकाया जाता है। बताओ उस सामान का वास्तविक भार क्या होगा जिसका प्रतीयमान भार 20 पौ० है?

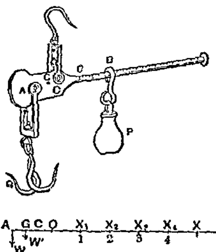
१७। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें a और b हैं और भार W छोटी भुजा b के सिरे पर P से और भुजा a के सिरे पर Q से समतुलित होता है; सिद्ध करो कि $\frac{a}{b}=\frac{P-W}{W-Q}$.

१८। एक तौलने वाली मशीन में बैठा हुआ एक आदमी यदि एक छड़ी से, आलम्ब और उस बिन्दु के बीच में जिससे तुला लटकी हुई है, किसी बिन्दु को दबायें, तो सिद्ध करो कि उसका भार पहले से अधिक प्रतीत होगा।

(छ) विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड)

१७१—साधारण अथवा रूमी विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड) पिंडों को तौलनेवाली एक मशीन है जिसमें एक दंड AB होता है जो एक नियत आलम्ब C के चारों ओर घूम सकता है।

बिन्दु A पर एक कटिया अथवा एक पलड़ा लटका होता है जिसमें तौलने वाली वस्तु रखी जाती है, और भुजा CB पर एक भार P सरकाया



जाता है। वह बिन्दु जिस पर P इस प्रकार रखा जाय कि दंड क्षैतिज हो जाय, पलड़े में रखे हुये पिंड के भार का निर्णय करता है। भुजा CB के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर संख्याएं खुदी होती हैं और वह चिन्ह जिसपर P ठहरता है पिंड के भार को बताता है।

१७२—विषम-भुज तुला को अंशांकित करना। मान लो विषमभुज तुला और पलड़े का भार W' है और G वह बिन्दु है जिसमें W' कार्य करता है। बहुधा दंड इस प्रकार बनाया जाता है कि G छोटी भुजा AC में हो।

जब पलड़े में कोई भार न हो तो मान लो कि O, CB में वह बिन्दु है जिस पर सरकने वाला भार P, W' से समतुलित होने के लिये रखा जाना चाहिये।

C पर घूर्ण लेकर,

$$W'.GC = P.CO \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

को क्रमश. दोनों पलड़ों में रखकर तोलें तो उसका भार P और Q प्रतीत होता है। पलड़े में लदा हुआ भार और पिंड का वास्तविक भार मालूम करो।

१४। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें बराबर नही है और एक पलड़ा लदा हुआ है। एक पिंड जिसका वास्तविक भार P पौं० है, एक पलड़े में w पौं० और दूसरे पलड़े में w' पौं० तुलता हुआ प्रतीत होता है। भुजाओं में निष्पत्ति मालूम करो और वह भार भी मालूम करो जिससे पलड़ा लदा हुआ है।

१५। एक लदी हुई तुला में जिसकी भुजायें बराबर नही है, P तौल में Q, और Q तौल में R प्रतीत होता है; बताओ तौल में R क्या प्रतीत होगा।

१६। एक लम्बे टंक के आकार का एक लकड़ी का टुकड़ा जिसकी चौड़ाई समान है और जिसका एक सिरा $\frac{1}{2}$ इंच और दूसरा सिरा $\frac{1}{4}$ इंच मोटा है, गुरुत्व-केन्द्र से लटका हुआ है और एक तुला के दंड का काम दे रहा है। तौलने वाले सामान को लम्बी भुजा से लटकाया जाता है। बताओ उस सामान का वास्तविक भार क्या होगा जिसका प्रतीयमान भार 20 पौं० है?

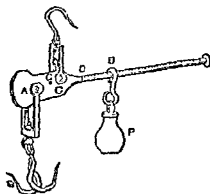
१७। एक भ्रमात्मक तुला की भुजायें a और b है और भार W छोटी भुजा b के सिरे पर P से और भुजा a के सिरे पर Q से समतुलित होता है; सिद्ध करो कि $\frac{a}{b}=\frac{P-W}{W-Q}$.

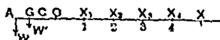
१८। एक तौलने वाली मशीन में बैठा हुआ एक आदमी यदि एक छड़ी से, आलम्ब और उस बिन्दु के बीच में जिससे तुला लटकी हुई है, किसी बिन्दु को दबायें, तो सिद्ध करो कि उसका भार पहले से अधिक प्रतीत होगा।

(छ) विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड)

१७१—साधारण अथवा रूमी विषम-भुज तुला (स्टील-यार्ड) पिंडों को तौलनेवाली एक मशीन है जिसमें एक दंड AB होता है जो एक नियत आलम्ब C के चारों ओर घूम सकता है।

बिन्दु A पर एक कटिया अथवा एक पलड़ा लटका होता है जिसमें तौलने वाली वस्तु रखी जाती है, और भुजा CB पर एक भार P सरकाया





जाता है। यह बिन्दु जिस पर P इस प्रकार रखा जाय कि दंड क्षैतिज हो जाय, पलड़े में रखे हुये पिंड के भार का निर्णय करता है। भुजा CB के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर संख्यायें खुदी होती हैं और वह चिह्न जिसपर P ठहरता है पिंड के भार को बताता है।

१७२—विषम-भुज तुला को अशांकित करना। मान लो विषम-भुज तुला और पलड़े का भार W' है और G वह बिन्दु है जिसमें W' कार्य करता है। बहुधा दंड इस प्रकार बनाया जाता है कि G छोटी भुजा AC में हो।

जब पलड़े में कोई भार न हो तो मान लो कि O, CB में वह बिन्दु है जिस पर सरकने वाला भार P, W' से समतुलित होने के लिये रखा जाना चाहिये।

C पर घूर्ण लेकर,

$$W'.GC=P.CO \quad \dots \quad \dots \quad (१).$$

यह समीकरण O के स्थान को निर्णय करता है, जो चिन्ह शून्य को प्रदर्शित करता है ।

जब पलड़े में भार W है, तो मान लो X वह बिन्दु है जहाँ पर P रखा जाना चाहिये । घूर्ण लेकर

$$W.CA+W'.GC=P.CX \quad \dots \quad \dots \quad (२).$$

समीकरण (२) से (१) घटा कर,

$$W.CA=P.OX.$$

$$\therefore\ OX=\frac{W}{P}.\ CA \quad \dots \quad \dots \quad (३).$$

अब मान लो $W=P$, तो (३) से $OX=CA$.

अतः यदि हम O से दूरी OX_1 $(=CA)$ नापें और विन्दु X_1 पर 1 अंकित कर दें, तो जब सरकने वाला भार यहाँ ठहरता है तो पलड़े में पिंड का भार P पौं० होगा ।

अब मान लो $W=2P$, तो (३) से $OX=2CA$.

अतः O से दूरी $2CA$ नापो और उसके सिरे पर 2 अंकित कर दो। इसी प्रकार मान लो $W=3P$, तो (३) से $OX=3CA$; अतः O से $3CA$ के बराबर दूरी नाप कर 3 अंकित कर दो ।

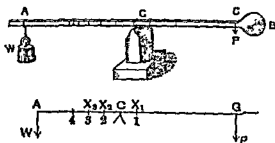
अतः विषम-भुज तुला को अंशांकित करने के लिये O से क्रमानुसार दूरियाँ $CA, 2CA, 3CA, \dots$ नाप कर उनके सिरों पर अंक 1, 2, 3,...लिख दो। बीच का स्थान P पौं० की भिन्नों को प्रदर्शित करने के लिये प्रविभाजित किया जा सकता है ।

यदि सरकने वाला भार 1 पौंड है तो चिन्ह पौंडों को प्रदर्शित करेंगे ।

उपसाध्य । चूँकि उत्तरोत्तर चिन्हों के बीच की दूरियाँ बराबर हैं, इसलिये आलम्ब से अंशांकित चिन्हों की दूरियाँ समान्तर श्रेणी में होंगी जिसका पदान्तर आलम्ब और उस विन्दु के बीच की दूरी है जिससे तौलने वाला पिंड लटकाया जाता है ।

१७३—जब मशीन का गुरुत्व-केन्द्र G बड़ी भुजा में होता है तो विन्दु O जिससे अंशांकित चिन्ह नापे जाते हैं छोटी भुजा में होता है। इसका भी सिद्धान्त वही है जो पहले था केवल इतना अन्तर रहता है कि इस स्थिति में हमें समीकरण (१) और (२) को जोड़ना होता है।

१७४—डेनी विषम-भुज तुला में AB एक दंड होता है जिसके सिरे पर एक भारी गाँठ अथवा गोला B होता है। A पर एक कटिया अथवा पलड़ा लगा होता है जिसमें तौलने वाली वस्तु रखी जाती है।



पिंड का भार दंड के उस बिन्दु को देख कर निकाला जाता है जिस पर मशीन समतुलित होती है।

[यह बहुधा डोरी का एक फंदा डाल कर किया जा सकता है जो दंड पर सरक सके और यह मालूम किया जाता है कि समतुलित अवस्था के लिये फंदा कहाँ होगा।]

१७५—डेनी विषमभुज तुला को अंशांकित करना। मान लो दंड और पलड़ों का भार P है और G उनका गुरुत्व-केन्द्र है। जब एक पिंड जिसका भार W है पलड़े में रखा हो तो मान लो C आलम्ब का स्थान है। C पर घूर्ण लेकर,

$$AC.W = CG.P = (AG - AC).P.$$

$$\therefore\ AC\,(P+W) = P.AG.$$

$$\therefore\ AC = \frac{P}{P+W}.AG \qquad \dots \qquad \dots \qquad (१)$$

अब मान लो $W=P$, तो $AC=\frac{1}{2}AG$.

अतः AG को समविभाजित करो और उसके मध्य-बिन्दु X_1 पर 1 अंकित कर दो ; जब विषम-भुज तुला इस बिन्दु पर समतुलित होती है तो पलड़े में रखे हुये पिंड का भार P होता है ।

अब मान लो $W=2P$, तो $AC=\frac{1}{3}AG$.

A से $\frac{1}{3}AG$ के बराबर दूरी पर एक बिन्दु लो और उस पर 2 अंकित कर दो ।

इसी प्रकार मान लो W क्रमानुसार $3P, 4P$ के बराबर हैं ; (१) से AC के संगत मान क्रम से $\frac{1}{4}AG$, $\frac{1}{5}AG$,.. हैं । दंड पर A से इन दूरियों पर बिन्दु लेकर 3,4, ..अंकित कर दो ।

अन्त में, मान लो $W=\frac{1}{2}P$, तो (१) से $AC=\frac{2}{3}AG$, और मान लो $W=\frac{1}{3}P$, तो (१) से $AC=\frac{3}{4}AG$.

A से वे बिन्दु लो जिनकी दूरियाँ $\frac{2}{3}AG$, $\frac{3}{4}AG$, $\frac{4}{5}AG$, . है और उन पर $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$,...अंकित कर दो ।

हम देखते हैं कि G का स्थान आसानी से निकाला जा सकता है, क्योंकि यही आलम्ब का वह स्थान है जहां विषम-भुज तुला पलड़े में बिना किसी भार के समतुलित अवस्था में रहती है ।

उपसाध्य । चूंकि AX_1, AX_2, AX_3, . संख्या 2, 3, 4 ...के उत्क्रमानुपाती हैं, इसलिये वे हरात्मक श्रेणी में हैं , अतः पलड़े से अंशांकित बिन्दुओं की दूरियाँ (तौली जानेवाली वस्तु की बराबर वृद्धि के संगत) हरात्मक श्रेणी में हैं ।

उदाहरण । एक डेनी विषम-भुज तुला का भार 6 पा० है, और पलड़े से उसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी 3 फुट है ; आलम्ब से उत्तरोत्तर अंशांकित बिन्दुओं की दूरियाँ मालूम करो ।

पिछली धारा के संकेत से $P=6$, और $AG=3$ फुट ।

$$\therefore\ AC=\frac{6}{6+W}\times 3=\frac{18}{W+6} \text{ फुट ।}$$

∴ जब $W=1$, $AX_1=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$ फ़ुट,

जब $W=2$, $AX_2=\frac{18}{8}=2\frac{1}{4}$ फ़ुट,

जब $W=3$, $AX_3=\frac{18}{9}=2$ फ़ुट,

....

जब $W=\frac{1}{2}$, $AX_{\frac{1}{2}}=\frac{18}{\frac{1}{2}+6}=2\frac{10}{13}$ फ़ुट, इत्यादि।

इनसे इष्ट अंशाकित विन्दु मालूम हो जाते हैं।

उदाहरणमाला २६

१। एक साधारण विषम-भुज तुला का भार 10 पौं० है; भार आलम्ब से 4 इंच की दूरी पर एक विन्दु से लटकाया गया है, और तुला का गुरुत्व-केन्द्र आलम्ब के दूसरी ओर 3 इंच दूरी पर है; सरकने वाला भार 12 पौं० है, बताओ 1 हण्डरवेट का अंशाकित चिन्ह कहाँ होगा।

२। एक भारी दंड से, जिसकी लम्बाई $14\frac{1}{2}$ इंच और भार 3 पौं० है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र भारी सिरे से $1\frac{1}{2}$ इंच है, एक विषमभुज तुला का काम लिया जा रहा है। सरकने वाला भार 2 पौं० है। बताओ आलम्ब कहाँ रखा जाय कि वह 12 पौं० तक तौल सके और उन अंशांकित चिन्हों के बीच में जो पौंडों को प्रदर्शित करते हैं क्या दूरी होगी?

३। एक विषम-भुज तुला में जिसमें आलम्ब की दूरी भार के लटकने वाले विन्दु से एक इंच है और सरकने वाला भार 6 औंस है, 15 पौं० के भार को तौलने के लिये आलम्ब से 8 इंच की दूरी पर रखना पड़ता है। बताओ 24 पौं० तौलने के लिये उसे कहाँ रखना पड़ेगा।

४। आलम्ब की दूरी उस विन्दु से जिस पर तौलने वाले सामान लटकाये जाते हैं $1\frac{1}{2}$ इंच है और वह दंड के गुरुत्व-केन्द्र से 2 इंच है। दंड का भार 3 पौं० है और उसपर सरकने वाला भार 2 पौं० का है। बताओ

उत्तरोत्तर पौंडों को प्रदर्शित करने वाले अंशांकित चिन्ह कितनी कितनी दूरी पर हैं, और वह सबसे छोटा कौन सा भार है जो तौला जा सकता है।

५। एक 4 फ़ुट लम्बी विषम-भुज तुला AB का गुरुत्व-केन्द्र A से 11 इंच है और उसका आलम्ब A से 8 इंच दूर है। यदि तुला का भार 4 पौं० है, और सरकने वाला भार 3 पौं० है, तो बताओ B से कितने इंच पर 15 पौं० को प्रदर्शित करने वाला अंशांकित चिन्ह होगा।

६। एक 2 फ़ुट लम्बे सम दंड AB को, जिसका भार 3 पौं० है, एक विषम-भुज तुला के काम में लाया जा रहा है। वह A से 4 इंच की दूरी पर एक बिन्दु से रुका हुआ है। बताओ 2 पौं० के सरकने वाले भार से बड़े से बड़ा कौन भार तौला जा सकता है, और वह बिन्दु भी मालूम करो जहां से अंशांकित चिन्ह नापे जाते हैं।

७। एक सम दंड को 20 बराबर भागों में विभाजित किया गया है, और आलम्ब पहले अंशांकित चिन्ह पर है। बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा भार जो इस मशीन से तौला जा सकता है 20 और 2 पौं० है। मशीन का भार और सरकने वाले भार का परिमाण मालूम करो।

८। 2 फ़ुट लम्बे और 3 पौं० भारी एक सम दंड से एक विषम-भुज तुला का काम लिया जा सकता है, जिसका आलम्ब एक सिरे से 2 इंच की दूरी पर है और सरकने वाला भार 1 पौं० है। बताओ बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा कौन सा भार इस मशीन से तौला जा सकता है। 20 पौं० को प्रदर्शित करने के लिये सरकने वाला भार कहां पर होगा?

९। एक विषम-भुज तुला की छड़ 33 इंच लम्बी है। भार के लटकने के बिन्दु से आलम्ब 4 इंच और छड़ का गुरुत्व-केन्द्र $5\frac{1}{2}$ इंच है। यदि छड़ का भार 6 पौं० है और सबसे बड़ा भार जो तौला जा सकता है वह 24 पौं० है, तो सरकने वाले भार का परिमाण मालूम करो।

१०। एक विषम-भुज तुला 3 फ़ुट लम्बी और $2\frac{1}{2}$ पौं० भारी छड़ से बनी हुई है। उसका आलम्ब एक सिरे से 4 इंच पर है। यदि सरकने वाला भार 1 पौं० है तो वह बड़े से बड़ा और छोटे से छोटा भार मालूम करो जो

इस तुला से तौला जा सके और अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी भी मालूम करो यदि वे पौंडों को प्रदर्शित करते हों।

११। एक साधारण विषम-भुज तुला, जो एक सम दंड का बना हुआ है, 40 इंच लम्बा है। दंड का भार सरकने वाले भार के बराबर है, और बड़े से बड़ा भार जो उससे तौला जा सकता है सरकने वाले भार से चार गुना है। आलम्ब का स्थान मालूम करो।

१२। एक डेनी विषम-भुज तुला में शून्य चिन्ह और तुला के सिरे के बीच की दूरी 20 बराबर भागों में विभाजित है और बड़े से बड़ा भार जो उससे तौला जा सकता है, 3 पौं० 9 औं० है। तुला का भार मालूम करो।

१३। उस डेनी विषम-भुज तुला की अंशांकित भुजा की लम्बाई मालूम करो जिसका भार 1 पौं० है और जिसमें 4 और 5 पौं० को प्रदर्शित करने वाले चिन्हों के बीच की दूरी एक इंच है।

१४। एक डेनी विषम-भुज तुला में आलम्ब पहले और दूसरे अंशांकित चिन्हों के बीचोबीच है। सिद्ध करो कि पलड़े में रक्खा हुआ भार तुला के भार का $\frac{7}{8}$ है।

१५। यदि एक विषम भुज तुला का भार घिस कर आधा रह जाय और उसकी लम्बाई और गुरुत्व-केन्द्र के स्थान में कोई परिवर्तन न हों, तो बताओ उसमें क्या संशोधन किये जायें कि उससे भार ठीक ठीक तौले जा सकें, यदि आरम्भ में आलम्ब से शून्य चिन्ह की दूरी उत्तरोत्तर अंशांकित चिन्हों के बीच की दूरी की एक तिहाई थी और यदि सरकने वाला भार एक पौंड हो।

१६। प्रयोग से एक विषम-भुज तुला का भार $\frac{1}{10}$ कम हो गया है परन्तु उसके गुरुत्व-केन्द्र के स्थान में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है। बताओ उसके अंशांकित चिन्हों को किस प्रकार ठीक किया जा सकता है।

१७। एक दूकानदार एक विषमभुज तुला के सरकने वाले भार को

बदल देता है, बताओ वह स्वयं अपने आप को अथवा अपने ग्राहकों को धोखा देता है ?

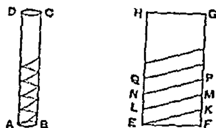
१८। एक तौलने वाली मशीन में जो एक साधारण विषम-भुज तुला के सिद्धान्त पर बनी हुई है, पौंडों को O से14 पौं० तक के अंशांकित चिन्हों से और स्टोनों को भुजा के अन्त में लटके हुये भार से पढ़ने है। यदि एक स्टोन को तौलने के लिये 7 औंस होते है, सरकने वाला भार $\frac{1}{2}$ पौं० है, और आलम्ब से भुजा की लम्बाई 1 फुट है, तो सिद्ध करो कि उत्तरोत्तर अंशांकित चिन्हो के बीच को दूरी $\frac{3}{4}$ इंच है।

१९। एक तौलने वाली मशीन इस प्रकार बनी हुई है कि पलड़े में रखे हुये प्रत्येक पूर्ण स्टोन के लिये भुजा के अत में m औंस का अधिक भार रखना पड़ता है। आलम्ब से भुजा की लम्बाई एक फुट है और पलड़े में रखे हुये अन्य पौंड भुज पर सरकने वाले n औंस के भार से नापे जाते है। सिद्ध करो कि उत्तरोत्तर पौंडो के लिये अशाकित चिन्हों के बीच की दूरी $\frac{6m}{7n}$ इंच होगी और आलम्ब से भार के लटकने के विन्दु की दूरी $\frac{3m}{56}$ इंच होगी।

(ज) पेंच (स्क्रू)

१७६—पेंच (स्क्रू) में धातु का एक बेलन होता है जिसके बाहरी पृष्ठ पर चारों ओर वहिर्गत धातु का तागा चक्कर लगाता है।

मान लो $ABCD$ एक ठोस बेलन है और $EFGH$ एक आयत है, जिसका



आधार EF ठोस बेलन की परिधि के बराबर है। EH और FG पर विन्दु

$L, N, Q,\ldots$ और $K, M, P,\ldots$ इस प्रकार लो कि $EL, LN,\ldots$ $FK, KM, MP,$. बराबर हों। $EK, LM, NP,$. को मिला दो।

आयत को बेलन के चारों ओर इस प्रकार लपेटो कि विन्दु E, A पर और EH, रेखा AD पर पड़े। बेलन के चारों ओर लिपट जाने पर विन्दु F, A पर ही विन्दु E पर पड़ने लगेगा।

अब रेखायें $EK, LM, NP,$.. बेलन के पृष्ठ पर एक सतत सर्पिल रेखा हो जायगी और यदि हम इस रेखा पर धातु को बाहर निकाला हुआ समझें तो यह पेंच (स्क्रू) की चूड़ी हो जाती है।

रचना से यह स्पष्ट है कि चूड़ी बेलन के चारों ओर चक्कर लगाती हुई एक आनत तल होती है, और उसका क्षैतिज से झुकाव हर जगह एक ही रहता है और कोण KEF के बराबर होता है। इस कोण को प्रायः पेंच का कोण कहते हैं, और यदि अक्ष के समानान्तर नापें तो दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी को पेंच का पिच कहते हैं।

यह स्पष्ट है कि FK पेंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी के बराबर है, और EF बेलन की परिधि के बराबर है जिसके चारों ओर चूड़ी खींची हुई है।

$$\therefore \text{स्पज्या (पेंच का कोण)} = \frac{FK}{EF}$$

$$= \frac{\text{पेंच का पिच}}{\text{उस वृत्त की परिधि जिसकी त्रिज्या अक्ष के पेंच से किसी बिन्दु की दूरी है।}}$$

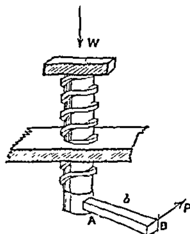
पेंच की चूड़ी के परिच्छेद के भिन्न भिन्न रूप होते हैं। हम केवल उसी परिच्छेद पर विचार करेंगे जो आयताकार होता है।

१७७—पेंच बहुधा एक नियत आलम्बन पर कार्य करता है, जिसके भीतरी ओर उसी बनावट का जैसी कि पेंच की चूड़ी है, एक गड्ढा खुदता जाता है जिसके किनारे किनारे चूड़ी सरकती जाती है। पेंच के लिये केवल अपने अक्ष के चारों ओर घूमते हुये अपनी लम्बाई की समानान्तर दिशा में ही आगे बढ़ने की गुंजाइश रहती है।

यदि पेंच को सीधा खड़ा रखा जाय और उसके ऊपर एक भार रख दिया जाय तो पेंच चारों ओर घूमता हुआ नीचे उतरेगा क्योंकि पेंच और उसके आलम्बन के बीच में कोई घर्षण नही माना जाता है। अतः यदि पेंच समतुलित अवस्था में रखा जाय तो उस पर किसी बल को लगाना पड़ेगा ; इस बल को बहुधा उस क्षैतिज भुजा के एक सिरे पर लगाते है जिसका दूसरा सिरा दृढ़ता पूर्वक पेंच में लगा होता है।

१७८—एक चिकने पेंच में, सामर्थ्य और भार के बीच का सम्बन्ध मालूम करना।

मान लो पेंच के अक्ष से चूड़ी के किसी बिन्दु की दूरी a है और उस बिन्दु की दूरी, AB, जिस पर सामर्थ्य लगाया गया है, b है।



पेंच, सामर्थ्य P, भार W और उन बिन्दुओं पर प्रतिबलों से जिन पर नियत आलम्बन पेंच को चूड़ियों को स्पर्श करता है, समतुलित है। मान लो पेंच की चूड़ियों के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर आलम्बन के प्रतिबल $R, S, T, ...$ है। क्योंकि पेंच की चूड़ी चिकनी है इसलिये ये सब उस पर लम्ब होंगे।

मान लो पेंच की चूड़ी का क्षैतिज से झुकाव a है। इसलिये प्रतिबल R के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अवयव बल क्रमसे R ज्या a और R कोज्या a हैं।

इसी प्रकार से हम $S, T,$ ..को विश्लिष्ट कर सकते हैं।

अतः आलम्बन के प्रतिबल ऊर्ध्वाधर दिशा में R कोज्याa, S कोज्याa, T कोज्याa,... और क्षैतिज दिशा में R ज्याa, S ज्या a, T ज्या a..के बराबर होंगे। ये सभी पिछले बल पेंच के भिन्न भिन्न विन्दुओं पर उसके अक्ष से समान दूरी पर कार्य करते हैं; इनका प्रभाव पेंच को P की दिशा के विपरीत दिशा में घुमाने का होता है।



ऊर्ध्वाधर बलों को बराबर रखने पर

$W = R$ कोज्या $a + S$ कोज्या $a + \cdot = (R+S+T+..)$ कोज्या a...(१).

पेंच के अक्ष पर घूर्ण लेने पर, धारा ९३ से,

$P.b = R$ज्या$a.a + S$ज्या $a\, a + T$ज्या $a.a + ...$

$= a$ज्या $a\,(R+S+T+\cdot)$ ... ... (२).

समीकरण (१) और (२) से, भाग देने पर

$$\frac{P.b}{W} = \frac{a\text{ज्या}a}{\text{कोज्या}a},$$

$$\therefore \frac{P}{W} = \frac{a}{b}\text{स्पर्ज्या}a = \frac{2\pi a\text{स्पर्ज्या}a}{2\pi b}.$$

परन्तु धारा १७६ से,

$2a\pi$ स्पर्ज्या a=दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी=पेंच का पिच।

और $2\pi\, b$=शक्ति—भुजा के सिरे B से खींचे गये वृत्त की परिधि।

$$\text{अतः यान्त्रिक लाभ} = \frac{W}{P} = \frac{2\pi b}{2\pi a\ \text{स्पर्ज्या}\ a}$$

$$= \frac{\text{उस वृत्त की परिधि जिसकी त्रिज्या सामर्थ्य-भुजा है}}{\text{पेंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी}}.$$

कर्म के सिद्धान्त को जांच।

शक्ति-भुजा की प्रत्येक परिक्रमा में पेंच अपनी दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी उठ जाता है।

अतः प्रत्येक परिक्रमा में सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म

$=P\times$शक्ति-भुजा के सिरे से खींचे गये वृत्त की परिधि,

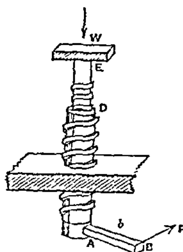
और भार के विपरीत किया गया कर्म

$=W\times$दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी।

यह उस सम्बन्ध से जो अभी सिद्ध किया जा चुका है बराबर है।

*१७९--पेच की चूड़ियों के बीच की दूरी घटा कर उसका यांत्रिक लाभ सैद्धान्तिक रूप से मनचाहा बढ़ाया जा सकता है, परन्तु व्यवहार में यह असम्भव है, क्योंकि यदि हम चूड़ियों के बीच की दूरी को बहुत अधिक घटा दें तो उनमें दबाव को सम्हालने की सामर्थ्य न रहेगी।

हन्टर के अन्तरीय पेंच में यह कठिनाई दूर की जा सकती है।



इस मशीन में एक पेंच AD होता है जो एक नियत आलम्बन में कार्य करता है। इस पेंच के भीतर का भाग खोखला होता है और उसमें एक छोटे

पेंच DE को भीतर जाने देने के लिये नाली खुदी होती है। पेंच DE एक गुटके में E पर इस प्रकार लगा होता है कि वह घूम नहीं सकता है परन्तु केवल अपनी लम्बाई की दिशा में ही हट सकता है।

जब सामर्थ्य-भुजा AB एक परिक्रमा कर लेती है तो पेंच AD दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी आगे बढ़ जाता है और साथ ही साथ छोटा पेंच DA के भीतर अपनी दो क्रमागत चूडियों के बीच की दूरी भी चला जाता है। अत: छोटा पेंच और इसलिये भार भी इन दोनों दूरियों के अन्तर के बराबर आगे बढ़ता है।

समतुलित अवस्था में मान लो कि बड़े पेंच और उसके आलम्बन के बीच में प्रतिबल $R, S, T, .$ हैं और भीतरी और बाहरी पेंचों के बीच में प्रतिबल $R', S', T', ...$ हैं; और मान लो कि a और a' त्रिज्यायें तथा α और α' पेंच के कोण हैं।

पिछली धारा की भांति चूंकि बाहरी पेंच समतुलित अवस्था में है, इसलिये

$P b = (R+S+T+...)$ ज्या $\alpha\, a - (R'+S'+...)$ ज्या $\alpha' . a' ....$ (१),

और $(R+S+T+...)$ कोज्या $\alpha = (R'+S'+..)$ कोज्या $\alpha' ....$ (२).

और चूंकि भीतरी पेंच भी समतुलित अवस्था में है, इसलिये

$W = (R'+S'+T'+..)$ कोज्या $\alpha' ....$ (३).

(२) और (३) से,

$$R'+S'+.... = \frac{W}{\text{कोज्या } \alpha'}, \text{ और } R+S+ . = \frac{W}{\text{कोज्या } \alpha}.$$

अत. (१) से, $P.b = W\, a$ स्पज्या $\alpha - W.a'$ स्पज्या α'.

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2\pi b}{2\pi a \text{ स्पज्या } \alpha - 2\pi a' \text{ स्पज्या } \alpha'}$$

$$= \frac{\text{शक्ति-भुजा के सिरे से खींचे गये वृत्त की परिधि}}{\text{दोनों पेंचों के बीच की दूरी}}.$$

दोनों पेंचों के पिचों को लगभग बराबर बनाकर हम, मशीन को बिना कमजोर किये हुये ही, यांत्रिक लाभ को बहुत अधिक कर सकते हैं।

कर्म के सिद्धान्त की सत्यता इस अवस्था में भी देखी जा सकती है, क्योंकि इस अवस्था में भार दोनों पेचों के बीच की दूरियों के अन्तर के बराबर उठता है।

उदाहरणमाला ३०

१। बताओ एक चिकना ऊर्ध्वाधर पेंच जिसका पिच $1\frac{1}{2}$ इंच है कितना भार उठा सकता है यदि सामर्थ्य 25 पौं० भार है और $3\frac{1}{2}$ फुट लम्बी भुजा के सिरे पर कार्य करती है।

२। उस पेंच को शक्ति-भुजा की लम्बाई क्या होनी चाहिये जिसकी एक इंच में 6 चूड़ियां हैं ताकि यान्त्रिक लाभ 216 हो जाय ?

३। 18 इंच लम्बी भुजा के सिरे पर लगाया गया कौनसा बल एक पेंच के शिखर पर 1100 पौ० का दबाव डालेगा जब 7 परिक्रमाओं में पेंच एक इंच का $\frac{3}{4}$ भाग उठ जाता है ?

४। एक पेच जिसका पिच $\frac{1}{4}$ इंच है एक 4 फुट लम्बे लीवर से घुमाया जा रहा है ; बताओ कौनसा बल 15 हण्डरवेट के भार को उठायगा।

५। एक जैक-स्क्रू की भुजा एक गज लम्बी है, और पेंच के एक इंच में दो चूड़ियां हैं। एक टन भार उठाने के लिये भुजा के सिरे पर कौनसा बल लगाना चाहिये ?

६। उस पेंच से, जिसके एक इंच में 4 चूड़ियां है, कितना दबाव पड़ता है, जब 50 पौं० भार का एक बल 2 फुट लम्बी भुजा के सिरे पर लगाया जाता है।

७। उस पेच से, जिसकी भुजा 2 फुट लम्बी है और जिसकी एक फुट लम्बाई में 10 चूड़ियां हैं, कितना दबाव पड़ेगा जब सामर्थ्य 112 पौं० भार का बल है ?

८। यदि सामर्थ्य 1 फुट लम्बी भुजा के सिरे पर लगाई जाय, और यदि पेंच एक फुट लम्बाई में सात पूरी परिक्रमा करे, तो बताओ एक टन भार के सम्हालने में कितनी सामर्थ्य लगानी पड़ेगी।

९। यदि उस लीवर की लम्बाई जिससे पेंच चलाया जाता है 6 फुट है, तो पेंच की दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी मालूम करो ताकि लीवर के प्रत्येक सिरे पर 10 पौं० भार की सामर्थ्य पेंच के शिखर पर 1000 पौं० भार का दबाव डाले।

१०। उस अन्तरीय पेंच में यांत्रिक लाभ मालूम करो जिसके एक इंच में 5 और 6 चूड़ियाँ हैं, और जिसमें 4 फुट व्यास के एक पहिये की परिधि पर सामर्थ्य लगाई जाती है।

११। उस अन्तरीय पेंच में यांत्रिक लाभ मालूम करो, जिसके बड़े पेंच में एक इंच में 8 और छोटे में 9 चूड़ियाँ हैं और जिसकी शक्ति-भुजा की लम्बाई एक फुट है।

१२। यदि एक पेंच का अक्ष ऊर्ध्वाधर है और उसकी चूड़ियों के बीच की दूरी 2 इंच है, और 100 पौं० भार का एक दरवाजा पेंच में कब्जे के रूप में लगा हुआ है, तो बताओ दरवाजे को एक समकोण घुमाने में कितना कर्म करना पड़ेगा।

१३। सिद्ध करो कि एक रस्सी का तनाव 9 टन भार के बराबर है यदि उसे एक द्विक पेंच के जिसके दायें पेंच में एक इंच में 5 चूड़ियाँ और बायें पेंच में एक इंच में 6 चूड़ियाँ हैं, 2 फुट लम्बे लीवर पर 49 पौं० के बल से लगाया जाय।

[चूंकि पेंच की एक पूरी परिक्रमा में उसके सिरे $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ इंच निकट आ जाते हैं, इसलिये कर्म के सिद्धान्त से

$$T\times(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6})\times\tfrac{1}{12}=49\times2\pi.2,$$

जहाँ पर T पौं० भार में रस्सी का तनाव है।]

अध्याय १३

घर्षण

(Friction)

१८०—धारा २० मे हमने चिकने पिंडों की परिभाषा दी है कि यदि वे एक दूसरे को स्पर्श करें तो उनका प्रतिबल स्पर्श-बिन्दु पर उन दोनों के पृष्ठों पर लम्ब होता है। इसलिये चिकने पिंडो में कोई ऐसा बल नहीं होता जो एक पिंड को दूसरे के ऊपर फिसलने से रोके। यदि एक पूर्णतया चिकना पिंड एक पूर्णतया चिकने आनत तल पर रखा जाय, तो क्योंकि पिंड और तल के बीच मे कोई ऐसा प्रतिबल नही होता जो पिंड को तल से फिसलने में रोकता हो इसलिये पिंड तल पर समतुलित नही रहेगा जबतक कि उसपर कोई बाह्य बल न लगाया जाय।

वास्तव में कोई ऐसे पिंड नही है जो पूर्णतया चिकने हों; दो स्पर्श करते हुये पिंडो में हमेशा कोइ न कोई ऐसा बल अवश्य होता है जो एक पिंड को दूसरे से फिसलने में रोके। ऐसे बल को घर्षण-बल कहते है।

घर्षण। परिभाषा। यदि दो पिंड एक दूसरे का स्पर्श करते हों, तो पिंडों का वह गुण, जिसके कारण उनके स्पर्श-बिन्दु पर एक ऐसा बल कार्य करता है जो एक पिंड को दूसरे से फिसलने में रोकता है, घर्षण कहलाता है, और इस बल को घर्षण-बल कहते हैं।

१८१—घर्षण स्वयं-सम्पूर्ण बल है; कभी भी गति को रोकने के लिये आवश्यक से अधिक घर्षण पैदा नही होता है।

मान लो समतल आधार की लोहे की एक भारी पटिया एक क्षैतिज मेज पर रखी हुई है। यदि हम पटिया के किसी बिन्दु से एक डोरी बाँधें और पटिया के गुरुत्व-केन्द्र की क्षैतिज दिशा में उसे खीचें, तो उसके हटाने में हमें एक प्रतिरोध का अनुभव होता है और वह ठीक उस बल के बराबर होता है जिसका प्रयोग हम पिंड पर करते हैं।

यदि हम खीचना बन्द कर दे तो घर्षण-बल भी कार्य करना बन्द कर देगा, क्योंकि यदि घर्षण-बल कार्य करना न बन्द करे तो पिंड चलने लगेगा।

परन्तु घर्षण, जो दो पिंडो में कार्य करता है, असीमित नही होता है। यदि हम उस बल को बराबर बढ़ाते जायें जिसका हम पटिया पर प्रयोग कर रहे हैं तो हम देखेंगे कि अन्त में घर्षण इस बल को पराजित करने में असमर्थ हो जाता है और पिंड चलने लगता है।

१८२—घर्षण साधारण जीवन की यांत्रिक समस्याओं में बड़ा भारी कार्य करता है। यदि हमारे जूतों और भूमि के बीच घर्षण न हो तो हम चल नही सकते। यदि सीढी और भूमि के बीच मे घर्षण न हो तो सीढी रुक नहीं सकती जबतक कि उसे ऊर्ध्वाधर से किसी भुकाव पर न रोका जाय। बिना घर्षण के कील और पेंच लकड़ी के अन्दर ठहर नहीं सकते और न इंजन रेल को खींच ही सकता है।

१८३—स्थिति सम्बन्धी घर्षण के नियम निम्नलिखित हैं :

पहला नियम। जब दो पिंड एक दूसरे को स्पर्श करते है, तो उनमें से एक के घर्षण की दिशा स्पर्श-बिन्दु पर उस दिशा के विपरीत होती है जिस दिशा मे स्पर्श-बिन्दु चलना आरम्भ करता है।

दूसरा नियम। समतुलित अवस्था मे घर्षण का परिमाण इतना होता है कि वह पिंड को चलने से ठीक रोक सके।

१८४—मान लो धारा १५६ की पहली स्थिति में धरातल रूक्ष है, और पिंड एक बल द्वारा रोके जाने के बजाय स्वतंत्रतापूर्वक धरातल पर रखा हुआ है। इस स्थिति में बल P घर्षण में बदल जायगा जो W ज्या α के बराबर है।

उदाहरण १। बताओ (१) एक गाड़ी के पहिये में, और (२) एक आदमी के पैर में जो चल रहा है, घर्षण-बल किस दिशा में कार्य करता है।

उदाहरण २। 30 पौं० भार का पिंड एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, और उस पर 10 पौं० भार के बराबर एक बल क्षैतिज से 30° का कोण बनाता हुआ कार्य करता है। सिद्ध करो कि घर्षण-बल लगभग 8.66 पौं० भार के बराबर है।

उदाहरण ३। रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखे हुये एक पिंड पर क्रमशः 7 और 8 पौं० भार के दो क्षैतिज बल एक दूसरे से 60° का कोण बनाते हुये कार्य करते है। सिद्ध करो कि घर्षण-बल 13 पौं० भार के बराबर है और पहले बल से ज्या$^{-1}$ $\frac{4\sqrt{3}}{13}$ का कोण बनाता है।

उदाहरण ४। 40 पौं० भार का पिंड एक रूक्ष आनत तल पर रखा हुआ है जो क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है, और (१) 14 पौं० भार के एक बल से जो धरातल के ठीक ऊपर की ओर कार्य करता है, (२) 25 पौं० भार के एक बल से जो धरातल के ठीक ऊपर की ओर कार्य करता है, (३) 20 पौं० के एक क्षैतिज बल से, (४) 30 पौं० भार के एक बल से जो धरातल से 30° का कोण बनाता है, रुका हुआ है। प्रत्येक अवस्था में घर्षण-बल मालूम करो।

उत्तर : (१) 6 पौं० भार धरातल के ऊपर की ओर ; (२) 5 पौं० भार धरातल के नीचे की ओर ; (३) 2·68 पौं० भार धरातल के ऊपर की ओर ; (४) 5·98 पौं० भार धरातल के नीचे की ओर।

१८५--उपर्युक्त नियम व्यापक रूप से सत्य है, परन्तु जो घर्षण प्रयोग में आ सकता है वह सीमित होता है और कभी कभी संस्थिति नष्ट होने की सीमा पर आ जाती है और गति आरम्भ हो जाती है।

सीमान्त घर्षण। परिभाषा। जब कोई पिंड दूसरे पिंड पर फिसलने वाला होता है तो संस्थिति सीमान्त कहलाती है, और जिस घर्षण का प्रयोग होता है उसे सीमान्त घर्षण कहते हैं।

१८६—सीमान्त घर्षण की दिशा पहले नियम से ज्ञात हो जाती है। (धारा १८३)।

सीमान्त घर्षण का परिमाण निम्नलिखित तीन नियमों से निकल आता है।

तीसरा नियम। सीमान्त घर्षण के परिमाण की अभिलम्ब प्रतिबल से अचर निष्पत्ति होती है और यह निष्पत्ति पिंडों के पदार्थों पर निर्भर होती है।

चौथा नियम। सीमान्त घर्षण स्पर्श करते हुये पृष्ठों के आकार और रूप पर उस समय तक निर्भर नहीं रहता जब तक कि अभिलम्ब प्रतिबल में कोई परिवर्तन न हो।

पाँचवाँ नियम। जब एक पिंड के दूसरे पिंड पर फिसलने से गति आरम्भ हो जाती है, तो घर्षण की दिशा गति की दिशा के विपरीत होती है। घर्षण का परिमाण वेग पर निर्भर नहीं रहता, परन्तु घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल की निष्पत्ति उस अवस्था से कुछ कम होती है जब पिंड समतुलित अवस्था में ठीक गति की सीमा पर होता है।

ऊपर के नियम प्रयोगात्मक हैं। इन्हें बिल्कुल सही तो नहीं मान सकते, यद्यपि वे साधारण अवस्था में बहुत कुछ सही फल देते हैं।

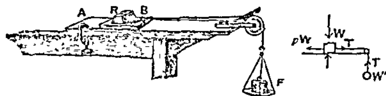
उदाहरणार्थ, यदि एक पिंड को दूसरे पिंड पर इतना दबायें कि स्पर्श करते हुये पृष्ठ कुचल जाने की सीमा पर पहुँच जाये तो ऐसी अवस्था में तीसरा नियम सही नहीं रह जाता और घर्षण अभिलम्ब प्रतिबल की अपेक्षा अधिक बढ़ जाता है।

१८७—**घर्षण-गुणक**। सीमान्त घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल के बीच की स्थिर निष्पत्ति को घर्षण-गुणक कहते हैं। इसे प्रायः μ में प्रदर्शित करते हैं; अतः यदि दो पिंडों के बीच संस्थिति नष्ट होने की सीमा पर हो और उस समय यदि F घर्षण और R अभिलम्ब प्रतिबल हो, तो $\frac{F}{R}=\mu$, अर्थात् $F=\mu R$.

स्पर्श करते हुये पदार्थों के भिन्न भिन्न जोड़ों के लिये μ के मान भिन्न भिन्न होते हैं; पदार्थों के ऐसे जोड़े अभी तक ज्ञात नहीं हुये हैं जिनके लिये घर्षण-गुणक इकाई के बराबर हों।

१८८—घर्षण के नियमों की प्रयोग द्वारा जाँच करना।

पहला प्रयोग। लकड़ी (A) का एक बड़ा एवं चिकना तख्ता लो और उसको इस प्रकार कस दो कि वह क्षैतिज हो जाय। एक दूसरी लकड़ी (B) का टुकड़ा लो जो सरकने वाले टुकड़े का काम करे और उसे यथासम्भव चिकना कर लो। B से एक हल्की डोरी बाँधो और तख्ते A के सिरे पर लगी हुई एक घिरनी के ऊपर से डोरी को लेजाकर उसके दूसरे सिरे पर पलड़ा बाँध दो।



घिरनी को इस प्रकार रखो कि डोरी का वह भाग जो ऊर्ध्वाधर नहीं है क्षैतिज हो। सरकने वाले टुकड़े के ऊपर एक ज्ञात भार R रक्खो, और पलड़े में ऐसे ज्ञात भार F रक्खो कि यह टुकड़ा ठीक फिसलने की अवस्था में हो जाय। यह इष्ट भार F बहुत कुछ लगभग नियत तख्ते A को धीरे धीरे खटखटाने से मालूम किया जा सकता है।

अब दायें चित्र पर विचार करो।

मान लो R और सरकने वाले तख्ते का कुल भार W है और F और पलड़े का भार मिल कर W' है। क्योंकि सरकने वाला टुकड़ा ठीक फिसलने की अवस्था में है इसलिये उस पर घर्षण μW होगा और डोरी का तनाव T, W' के बराबर होगा क्योंकि यह पलड़े और F से समतुलित है।

सरकने वाले टुकड़े के समतुलन के लिये

$$\mu W = W'.$$

अब स्लाइडर पर एक दूसरा भार रखो, और सगत भार F को इस प्रकार ठीक करो कि वह फिर फिसलने की अवस्था में हो जाय, और W और W' के नये मानों W_1 और W_1' पर विचार करो, तो पहले की भाँति मालूम होगा कि

$$\mu = \frac{W_1'}{W_1}.$$

इस प्रयोग को फिर सरकने वाले टुकड़े पर भिन्न भिन्न भार रख कर दोहराओ, और $\frac{W_2'}{W_2}, \frac{W_3'}{W_3}, ..$ के मान निकालो, तो मालूम होगा कि $\frac{W'}{W}, \frac{W_1'}{W_1}, \frac{W_2'}{W_2}, ...$ लगभग बराबर हैं।

अतः तीसरे नियम के पहले भाग, अर्थात् μ का मान अभिलम्ब प्रतिबल पर निर्भर नहीं होता, की सत्यता की जाँच हो गई।

दूसरा प्रयोग। लकड़ी (B) का एक दूसरा टुकड़ा लो जिसका आकार पहले प्रयोग में प्रयोग किये गये टुकड़े से बिल्कुल भिन्न हो। [इसे उसी चिकनी की हुई लकड़ी से काटना चाहिये जिससे पहला टुकड़ा B लिया गया था।]

इस टुकड़े B का A तख्ते से स्पर्श करता हुआ क्षेत्र पहले प्रयोग में लिये गये क्षेत्र से चाहे अधिक हो चाहे कम, बिल्कुल भिन्न होना चाहिये।

पहले प्रयोग को फिर से करो और μ का सगत मान मालूम करो। यह मान, प्रयोग की सीमा को ध्यान रखते हुये पहले प्रयोग वाला ही आवेगा परन्तु दोनों प्रयोग में अन्तर केवल इतना ही है कि स्पर्श करते हुये रूक्ष पृष्ठों के क्षेत्र भिन्न भिन्न हैं।

अतः चौथे नियम की सत्यता की जाँच हो गई।

तीसरा प्रयोग। पहले से भिन्न प्रकार की लकड़ी (C) का एक टुकड़ा लो और उसे भली प्रकार से समतल कर लो। उसमें से भिन्न भिन्न क्षेत्र के टुकड़े काट लो किन्तु जहाँ तक सम्भव हो उनके पृष्ठ एक से रहें।

अब पहला और दूसरा प्रयोग फिर करो और μ का मान निकालो। μ का यह मान μ के उस मान से भिन्न होगा जबकि सरकने वाला

टुकड़ा B लकड़ी का बना हुआ था। अतः तीसरे नियम के दूसरे भाग अर्थात् निष्पत्ति पिंडों के पदार्थों पर निर्भर होती है, की सत्यता की जाँच हो गई।

चौथा प्रयोग। पिछले तीन प्रयोगों को फिर से करो परन्तु अब F को इस प्रकार चुनो कि सरकने वाला टुकड़ा फिसलने की अवस्था के स्थान पर एक स्थिर वेग से चलने लगे, तो पाँचवें नियम की लगभग सत्यता की जाँच हो जायगी।

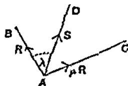
पिछले प्रयोगों में लकड़ी के पृष्ठ कितनी ही सावधानी से क्यों न बनाये जायें विद्यार्थियों को वास्तविक सांख्यिक परिमाणों के प्राप्त करने में बहुत कुछ अशुद्धियों की आशा रखनी चाहिये। घिरनी के घुमाने के लिये आवश्यक बल के लगाने भी में बहुत कुछ संशोधन की आवश्यकता है। घिरनी कितनी ही हल्की और अच्छी क्यों न बनी हो, उसकी धुरी पर कुछ न कुछ घर्षण अवश्य रहता है, इसलिये उसके दोनों ओर डोरी के तनाव, जैसा कि हमने अनुमान कर लिया है, बिल्कुल बराबर नहीं होंगे, अर्थात् F का कुछ भाग घिरनी के घुमाने में भी लग जायगा।

यह वह रीति है जिसका मोरिन ने सन् १८३३ ई० में प्रयोग किया था।

१८९—घर्षण-कोण। यदि संस्थिति सीमा पर हो, और घर्षण और अभिलम्ब प्रतिबल को एक मात्र बल में सयोजित कर लिया जाय, तो उस कोण को जो यह बल अभिलम्ब से बनाता है, घर्षण-कोण कहते हैं, और एक मात्र बल को परिणामी प्रतिबल कहते हैं।

मान लो A दो पिंडों का स्पर्श-विन्दु है, और मान लो अभिलम्ब बल R और घर्षण μR की दिशायें AB और AC हैं।

मान लो परिणामी प्रतिबल S की दिशा AD है, इसलिये घर्षण-कोण BAD होगा। मान लो यह कोण λ है।



क्योंकि R और μR, S के अवयव बल हैं, इसलिये

S कोज्या $\lambda = R$, और S ज्या $\lambda = \mu R$

अतः वर्ग करके और जोड़ने पर

$$S = R\sqrt{1+\mu^2},$$

और भाग देने पर स्पज्या $\lambda = \mu$.

अतः हम देखते हैं कि घर्षण-गुणक घर्षण-कोण की स्पज्या के बराबर होता है।

१९०—चूँकि घर्षण का महत्तम मान μR है, इसलिये परिणामी-प्रतिबल की दिशा और अभिलम्ब की दिशा के बीच का बड़े से बड़ा कोण λ अर्थात् स्पज्या$^{-1}\mu$ होगा।

अतः यदि दो पिंड एक दूसरे के सम्पर्क में हों और यदि उनके उभय-निष्ठ अभिलम्ब को अक्ष और स्पर्श-बिन्दु को शीर्ष मान कर एक शंकु बनाया जाय जिसका अर्द्धशीर्ष कोण स्पज्या$^{-1}\mu$ हो, तो यह तो सम्भव है कि परिणामी-प्रतिबल की कोई भी दिशा इस शंकु के भीतर अथवा इसके ऊपर हो, परन्तु यह सम्भव नहीं है कि उसकी कोई दिशा इस शंकु के बाहर हो।

इस शंकु को घर्षण-शंकु कहते हैं।

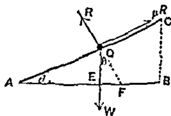
१९१—निम्नलिखित सारिणी में कुछ पदार्थों के घर्षण-गुणक और घर्षण-कोण प्रोफेसर रेन्कीन की 'मैशीनरी एण्ड मिल्वर्क' नामक पुस्तक से लेकर दिये गये हैं।

पदार्थ	μ	λ
लकड़ी, लकड़ी के सम्पर्क में—सूखी	·25 से ·5 तक	14° से 26½° तक
,, ,, ,, ,, ,,—साबुन लगी हुई	·04 से ·2 तक	2° से 11½° तक
धातु, धातु ,, ,, ,,—सूखी	·15 से ·2 तक	8½° से 11½° तक
,, ,, ,, ,, ,,—भीगी	3	16½°
चमड़ा ,, ,, ,, ,,—सूखा	·56	29½°
,, ,, ,, ,, ,,—भीगा	·36	20°
,, ,, ,, ,, ,,—तेल लगा हुआ	·15	8½°

१९२—यदि एक पिंड एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हो, और केवल अपने भार और धरातल के प्रतिबल के कारण धरातल से नीचे फिसलने की ठीक सीमा पर हो, तो क्षैतिज से धरातल का झुकाव घर्षण-कोण के बराबर होगा।

मान लो क्षैतिज से धरातल का झुकाव θ पिंड का भार W है और R अभिलम्ब प्रतिबल है।

चूंकि पिंड धरातल से नीचे फिसलने की सीमा पर है अतः घर्षण धरातल के ऊपर की ओर कार्य करेगा और μR होगा।



धरातल के लम्ब और समानान्तर दिशा में विश्लिष्ट किया, तो

$$W \text{ कोज्या } \theta = R,$$

और

$$W \text{ ज्या } \theta = \mu R.$$

अतः भाग देकर

$$\text{स्पज्या } \theta = \mu = \text{स्पज्या (घर्षण-कोण)},$$

$$\therefore \theta = \text{घर्षण-कोण}।$$

इसे इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं :

चूंकि पिंड अपने भार और परिणामी-प्रतिबल के कारण समतुलित अवस्था में है, इसलिये परिणामी-प्रतिबल ऊर्ध्वाधर होगा। परन्तु, क्योंकि समतुलित अवस्था सीमित है इसलिये परिणामी-प्रतिबल अभिलम्ब से घर्षण-कोण बनायेगा।

अतः परिणामी और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण घर्षण-कोण है, अर्थात् क्षैतिज से धरातल का झुकाव घर्षण-कोण के बराबर है।

इस गुण के कारण जो अभी सिद्ध किया गया है घर्षण-कोण को प्रायः अवलम्बित-कोण भी कहते हैं।

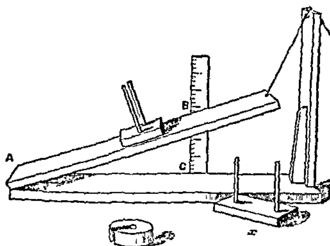
विद्यार्थी को सदा स्मरण रखना चाहिये कि जब कोई पिंड आनत धरातल पर किसी बाह्य बल से रुका हुआ रखा हो, तो यह अनुमान नहीं करना चाहिये कि घर्षण-गुणक सदा धरातल के क्षैतिज से झुकाव की स्पर्शज्या के बराबर होगा।

१९३—प्रयोग द्वारा घर्षण-गुणक मालूम करना, और घर्षण के नियमों की जाँच करना। (दूसरी रीति)

पिछली धारा के साध्य से दो पिंडों के बीच का घर्षण-गुणक प्रयोग द्वारा मालूम किया जा सकता है।

मान लो कि आनत तल किसी पदार्थ का बना हुआ है और उसका पृष्ठ यथा-सम्भव चिकना है। उस पर मान लो कि किसी दूसरे पदार्थ की बनी हुई एक पटिया रखी हुई है जिसका एक फलक समतल है।

यदि तल के झुकाव के कोण को धीरे धीरे तबतक बढ़ाते जायँ जबतक पटिया ठीक फिसलने न लगे, तो उस समय झुकाव के कोण की स्पर्शज्या घर्षण-गुणक के बराबर होगी।



इस फल को यथा-सम्भव शुद्ध मालूम करने के लिये प्रयोग उन्हीं पदार्थों से बार बार करना चाहिये और फलों का मध्यमान निकाल लेना चाहिये।

जिन यंत्रों का यहाँ चित्र में प्रयोग किया गया है उनमें एक तख्ता सिरे पर

कब्जे द्वारा दूसरे तख्ते से लगा हुआ है और दूसरा तख्ता एक मेज से लगा हुआ है। कब्जे द्वारा लगा हुआ तख्ता बँधी हुई एक डोरी द्वारा ऊँचा और नीचा किया जा सकता है। डोरी का दूसरा सिरा एक नियत आलम्बन के सिरे मे जाता है।

कब्जे द्वारा लगे हुये तख्ते पर भिन्न भिन्न आकार और धातु के सरकनेवाले टुकड़े रखे जा सकते है जिन पर भिन्न भिन्न भार रखे जा सकते हैं। हरएक सरकनेवाले टुकड़े x में दो पीतल की छड़ें पेंच द्वारा लगी होती हैं, जिन पर भार इस प्रकार एक के ऊपर एक रखे जा सकते हैं कि प्रयोग में वे फिसल न जायें। नीचे के तख्ते में एक ऊर्ध्वाधर अंशांकित पटरी लगी होती है जिससे कब्जे द्वारा लगे हुये तख्ते की ऊँचाई B पर देखी जा सकती है। इस प्रकार $\frac{BC}{AC}$ का, अर्थात धारा १८५ की स्पर्ज्या θ का मान आसानी से मालूम हो जाता है।

इस यंत्र से घर्षण के नियमों की जाँच की जा सकती है, क्योंकि प्रयोग की सीमाओं के भीतर यह मालूम हो जायगा कि $\frac{BC}{AC}$ अर्थात् μ का मान

(१) हमेशा वही रहेगा जबतक कि सरकानेवाला टुकड़ा x उसी धातु का बना हो और उसका पृष्ठ उतना ही चिकना रहे,

(२) सरकनेवाले टुकड़े पर रखे हुये भारो अथवा उसके आकार पर निर्भर नही रहता है, और

(३) भिन्न भिन्न पदार्थों के लिये भिन्न भिन्न होता है।

यह वही रीति है जिसका प्रयोग कौलाम्ब ने सन् १७८५ ई० में किया था।

१९४—रूक्ष आनत धरातल पर सन्तुलन। एक पिंड, एक रूक्ष धरातल पर, जो क्षैतिज से घर्षण-कोण से बड़ा कोण बनाता है, रखा हुआ है, और धरातल के समानान्तर महत्तम-ढाल रेखा पर कार्य करते हुये एक बल से रुका हुआ है। बताओ बल किन सीमाओं के भीतर रहेगा।

मान लो धरातल क्षैतिज से कोण a बनाता है और W पिंड का भार और R अभिलम्ब प्रतिबल है। (चित्र १, धारा १५६)

(१) मान लो पिंड धरातल से फिसलने की सीमा पर है, तो घर्पण धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करेगा और μR के बराबर होगा। मान लो पिंड को समतुलित रखने के लिये बल P की आवश्यकता पड़ती है।

धरातल के समानान्तर और लम्ब दिशा में विश्लिष्ट किया, तो

$$P+\mu R=W \text{ ज्या } a \qquad (१),$$

और

$$R=W \text{ कोज्या } a \qquad \ldots \qquad (२).$$

$$\therefore \; P=W (\text{ज्या } a-\mu \text{ कोज्या } a)$$

यदि $\mu=$स्पज्या λ, तो

$$P=W [\text{ज्या } a-\text{स्पज्या } \lambda \text{ कोज्या } a]$$

$$=W\left[\frac{\text{ज्या } a \text{ कोज्या } \lambda-\text{ज्या } \lambda \text{ कोज्या } a}{\text{कोज्या } \lambda}\right]$$

$$=W\frac{\text{ज्या } (a-\lambda)}{\text{कोज्या } \lambda} \qquad (३).$$

(२) मान लो पिंड धरातल पर ऊपर की ओर फिसलने की सीमा पर है, तो घर्पण धरातल पर नीचे की ओर कार्य करेगा और μR के बराबर होगा। मान लो पिंड को समतुलित रखने के लिये बल P_1 की आवश्यकता पड़ती है। इस स्थिति में

$$P_1-\mu R=W \text{ ज्या } a,$$

और

$$R=W \text{ कोज्या } a.$$

$$\therefore \; P_1=W (\text{ज्या } a+\mu \text{ कोज्या } a)$$

$$=W (\text{ज्या } a+\text{स्पज्या } \lambda \text{ कोज्या } a)$$

$$=W\frac{\text{ज्या } (a+\lambda)}{\text{कोज्या } \lambda} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (४).$$

यदि पिंड समतुलित हो तो यह मान P और P_1 बल के सीमान्त मान होगें यदि बल P और P_1 के बीच में हों तो पिंड समतुलित अवस्था में तो रहेगा परन्तु किसी भी दिशा में चलने की सीमा पर नही होगा।

अत. समतुलित अवस्था के लिये बल $W \frac{\text{ज्या } (\alpha \pm \lambda)}{\text{कोज्या } \lambda}$ के बीच में रहना चाहिये।

हम देखते हैं कि P_1 का मान P के मान में μ का चिन्ह बदल कर मालूम किया जा सकता है।

१९५—यदि बल P आनत धरातल से कोण θ बनाता हुआ कार्य करे (जैसा कि धारा १५६ की तीसरी स्थिति में है) तो यदि पिंड धरातल से फिसलने की सीमा पर हो तो घर्षण धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करेगा अत समतुलित अवस्था में समीकरण

$$P \text{ कोज्या } \theta + \mu R = W \text{ ज्या } \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (१),$$

$$P \text{ ज्या } \theta + R = W \text{ कोज्या } \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

होगे।

अत. (२) को μ से गुणा करके घटाने पर,

$$P = W \frac{\text{ज्या } \alpha - \mu \text{ कोज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \theta - \mu \text{ ज्या } \theta} = W \frac{\text{ज्या } (\alpha - \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta + \lambda)}.$$

P के इस मान को (२) में रख कर R का मान मालूम हो जायगा।

यदि पिंड धरातल पर ऊपर की ओर फिसलने की सीमा पर हो तो μ के चिन्ह को बदल कर,

$$P_1 = W \frac{\text{ज्या } (\alpha + \lambda)}{\text{कोज्या } (\theta - \lambda)}.$$

उपसाध्य। वह बल जो पिंड को धरातल पर ऊपर की ओर खीचने की सीमा पर है, तब लघुतम होगा जब

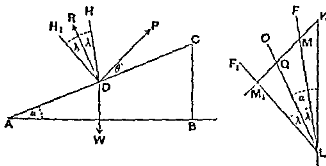
$$W \frac{\text{ज्या } (\alpha + \lambda)}{\text{कोज्या}(\theta - \lambda)} \text{ लघुतम हो,}$$

अर्थात्, जब $\quad$ कोज्या $(\theta - \lambda) = 1$,

अर्थात्, जब $\quad \theta = \lambda$.

अतः पिंड को धरातल पर ऊपर की ओर खींचने वाला बल लघुतम होगा जब वह आनत तल मे घर्षण-कोण के बराबर कोण बनाता हुआ कार्य करे ।

१९६—पिछली धारा के फल ज्यामितीय रचना द्वारा भी मालूम किये जा सकते है ।



एक ऊर्ध्वाधर रेखा KL, किसी उचित पैमाने (जैसे एक इंच एक पौंड अथवा एक इंच दस पौंड को) पर भार W को प्रदर्शित करती हुई खींचो।

रेखा LO अभिलम्ब प्रतिबल R की दिशा के समानान्तर खींचो। कोण OLF और OLF_1 को घर्षण-कोण λ के बराबर, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है, बनाओ।

अब जब पिंड धरातल पर नीचे अथवा ऊपर की ओर चलने की सीमा पर होता है तो LF और LF_1, D पर परिणामी प्रतिबल DH और DH_1 की दिशाओं के समानान्तर रहते हैं ।

KMM_1 सम्हालने वाले बल P के समानान्तर खींचो ताकि वह LF और LF_1 को M और M_1 पर फिर मिलें ।

अब स्पष्ट है कि KLM और KLM_1 क्रमशः समतुल्न की दोनों अन्तिम अवस्थाओं में बल-त्रिभुज होंगे ।

अतः उसी पैमाने पर जिसपर KL, W को प्रदर्शित करता है, KM और KM_1 पिछली धारा के P और P_1 को प्रदर्शित करेंगे ।

स्पष्टत: $OLK=R$ और उर्ध्वाधर के बीच का कोण$=\alpha$,

$$\therefore \angle MLK=\alpha-\lambda \text{ और } \angle M_1LK=\alpha+\lambda.$$

इसी प्रकार $\angle KQO=R$ और P की दिशाओं के बीच का कोण$=90°-\theta$,

$$\therefore \angle KQL=90°+\theta,\ \angle KM_1L=90°+\theta-\lambda$$

और $$\angle KML=90°+\theta+\lambda.$$

अत. $$\frac{P}{W}=\frac{KM}{KL}=\frac{\text{ज्या } KLM}{\text{ज्या } KML}=\frac{\text{ज्या } (\alpha-\lambda)}{\text{ज्या } (90°+\theta+\lambda)}=\frac{\text{ज्या } (\alpha-\lambda)}{\text{कोज्या } (\theta+\lambda)},$$

और $$\frac{P_1}{W}=\frac{KM_1}{KL}=\frac{\text{ज्या } KLM_1}{\text{ज्या } KM_1L}=\frac{\text{ज्या } (\alpha+\lambda)}{\text{ज्या } (90°+\theta-\lambda)}=\frac{\text{ज्या } (\alpha+\lambda)}{\text{कोज्या } (\theta-\lambda)}.$$

उपसाध्य। यह स्पष्ट है कि KM_1 तब लघुतम होगा जब वह LF_1 पर लम्ब हो, अर्थात् जब P_1 परिणामी प्रतिबल DH_1 की दिशा से समकोण और इसलिये आनत तल से λ कोण बनावे।

उदाहरणमाला ३१

१। 40 पौं० भार का एक पिंड रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है जिसका घर्षण-गुणक ·25 है; वह लघुतम बल मालूम करो जो क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ पिंड को खींच सके।

वह लघुतम बल भी मालूम करो, जो क्षैतिज से कोण कोज्या$^{-1}\frac{3}{5}$ पर कार्य करके पिंड को खींच सकेगा।

प्रत्येक दशा में धरातल के परिणामी प्रतिबल की दिशा और परिमाण भी मालूम करो।

२। एक समतल आधार का भारी कुंदा एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है। उस पर एक बल लगाया गया है जो धरातल से 45° का कोण बनाता है और बल धीरे धीरे बढ़ाया जा रहा है यहाँ तक कुंदा ठीक फिसलने की अवस्था में आ जाता है। यदि घर्षण-गुणक ·5 है, तो बल की कुन्दे के भार से तुलना करो।

३। 30 पौं० का एक भार एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है और 10 पौं० भार के एक बल के क्षैतिज दिशा में लगाने से ठीक चलाया जा सकता है। घर्षण-गुणक और परिणामी प्रतिबल की दिशा और परिमाण मालूम करो।

४। सिद्ध करो कि वह लघुतम बल जो भार W को एक रूक्ष धरातल पर खसका सकता है W ज्या ϕ है, जहाँ ϕ घर्षण-कोण है।

५। एक रूक्ष धरातल का क्षैतिज से झुकाव कोज्या$^{-1}\frac{12}{13}$ है। सिद्ध करो कि यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{3}$ है, तो धरातल के समानान्तर कार्य करता हुआ लघुतम बल, जो धरातल पर रखे हुये 1 हण्डरवेट भार को रोक सकेगा, $8\frac{8}{13}$ पौं० भार के बराबर होगा। यह भी सिद्ध करो कि वह बल जो पिंड को धरातल के ऊपर खींच सकेगा $77\frac{7}{13}$ पौं० भार के बराबर होगा।

६। एक आनत धरातल का आधार 4 फुट और ऊँचाई 3 फुट है। यदि 8 पौं० का एक बल धरातल के समानान्तर लगाया जाय तो वह 20 पौं० के भार को फिसलने से ठीक रोक लेता है। घर्षण-गुणक मालूम करो।

७। 4 पौं० भार का एक पिंड 30° के ढाल के एक रूक्ष धरातल पर सीमित समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। यदि धरातल का ढाल 60° कर दिया जाय तो बताओ पिंड को सम्हालने के लिये धरातल के समानान्तर कौन सा बल लगाना पड़ेगा।

८। 30 पौं० का एक भार एक रूक्ष आनत धरातल पर सीमित समतुलित अवस्था में रखा हुआ है। धरातल की ऊँचाई लम्बाई की $\frac{3}{5}$ है। सिद्ध करो कि भार को धरातल पर ऊपर की ओर ठीक खींचने के लिये धरातल के समानान्तर 36 पौं० भार के बल की आवश्यकता होगी।

९। 60 पौं० का एक भार एक रूक्ष आनत धरातल पर नीचे की ओर फिसलने की अवस्था में उस समय होता है जब धरातल के समानान्तर उस पर 24 पौं० भार का एक बल कार्य करे। वही भार ऊपर की ओर फिसलने की अवस्था में तब होता है जब धरातल के समानान्तर उस पर 36 पौं० भार का एक बल कार्य करे। घर्षण-गुणक मालूम करो।

१० । दो आनत धरातलों का एक उभयनिष्ट शीर्ष है, और शीर्ष पर लगी एक चिकनी घिरनी पर जाती हुई एक डोरी दो बराबर भारों से बँधी हुई है । यदि एक धरातल रूक्ष और दूसरा चिकना हो, तो दोनों धरातलों के झुकाव के कोणों के बीच का सम्बन्ध मालूम करो यदि चिकने धरातल पर रखा हुआ भार नीचे फिसलने की अवस्था में हो ।

११ । एक रूक्ष आनत धरातल पर रखे हुये विभिन्न परिमाण के दो भार एक डोरी से बँधे हुये हैं जो धरातल में नियत एक घिरनी के चारों ओर होकर जाती है । धरातल का महत्तम झुकाव मालूम करो यदि भार सीमित समतुलित अवस्था में हों ।

१२ । दो बराबर भार एक डोरी के सिरों पर बँधे हुये हैं जो दो समान रूक्ष धरातलों के शिखर पर से जाती है । धरातलों की ऊँचाई बराबर है और वे एक दूसरे से सटे हुये हैं और उनके झुकाव क्षैतिज से क्रम से 30° और 60° हैं । सिद्ध करो कि भार फिसलने वाले होंगे यदि घर्षण-गुणक $2-\sqrt{3}$ हो ।

१३ । एक कण एक रूक्ष गोले के बाहरी पृष्ठ पर रखा हुआ है । गोले का घर्षण-गुणक μ है । सिद्ध करो कि कण फिसलने की अवस्था में होगा यदि उससे केन्द्र को खींची हुई त्रिज्या ऊर्ध्वाधर से कोण स्पर्ज्या$^{-1}\mu$ बनाती हो ।

१४ । एक खोखले गोले के भीतर, जिसकी त्रिज्या a है, कितनी ऊँचाई तक एक कण ठहरा रह सकता है यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ हो ?

१५ । किस झुकाव पर बर्फ पर खींचने वाली एक गाड़ी पर जोर लगाये जायँ कि वह किसी पहाड़ी के ऊपर कम से कम परिश्रम से खींची जा सके ?

१६ । 5 हण्डरवेट भार के एक घनाकार पत्थर को एक बल P, जो क्षैतिज से 40° का कोण बनाता है, एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर खींचता

है। यदि घर्षण-कोण 25° हो तो लेखा-चित्रीय रचना द्वारा P का लघुतम मान मालूम करो।

१७। 1 हण्डरवेट भार का एक पिंड एक धरातल पर जिसका झुकाव क्षैतिज से 25° का है रखा हुआ है। उसे धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करता हुआ 15 पौं० भार का एक बल फिसलने से रोकता है। लेखा-चित्रीय रचना द्वारा वह बल मालूम करो जो उसे ऊपर की ओर ठीक खींच सके और घर्षण-गुणक का मान भी मालूम करो।

१९७—एक रूक्ष आनत धरातल पर किसी पिंड के खींचने में किये गये कर्म का परिमाण मालूम करना।

धारा १९४ की दूसरी स्थिति में हम देख आये हैं कि बल P_1 जो पिंड को धरातल पर ठीक ऊपर की ओर खींचेगा W (ज्या $\alpha+$ μ कोज्या α) होगा।

अत: A से C तक पिंड को खींचने में किया गया कर्म

$=P_1 \times AC$ (चित्र धारा १९६)

$=W$ (ज्या $\alpha+\mu$ कोज्या α). AC

$=W.AC$ ज्या $\alpha+\mu.W.AC$ कोज्या α

$=W.BC+\mu W.AB$

=धरातल के न होने पर पिंड को उसी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई तक खींचने में किया गया कर्म+पिंड को आनत धरातल के आधार के बराबर क्षैतिज दूरी तक जो उतनी ही रूक्ष है जितना कि धरातल, खींचने में किया गया कर्म।

१९८—पिछली धारा मे हम देखते हैं कि यदि हमारा आनत धरातल रूक्ष हो, तो सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म भार के विपरीत किये गये कर्म से अधिक होता है। यह बात किसी मशीन के लिये सत्य है। इस सिद्धान्त को इस प्रकार लिख सकते हैं :

किसी मशीन में सामर्थ्य द्वारा किया गया कर्म भार, मशीन के घर्षणीय प्रतिरोध और मशीन के अवयव भागों के भारों के विपरीत किये गये कर्म के बराबर होता है।

किसी मशीन में भार पर किये गये कर्म और सामर्थ्य द्वारा किये गये कर्म की निष्पत्ति को मशीन की दक्षता कहते हैं, अत.

$$\text{दक्षता} = \frac{\text{मशीन से किया गया उपयोगी कर्म}}{\text{मशीन को प्रदान किया गया कर्म}}\,।$$

मान लो यदि घर्षण न हो तो P_0 आवश्यक सामर्थ्य होती है और P वास्तविक सामर्थ्य है, तो धारा १३८ से,

भार के विपरीत किया गया कर्म

$= P_0 \times$ वह दूरी जो इसका प्रयोग-विन्दु खिसकता है,

और मशीन को प्रदान किया गया कर्म

$= P \times$ वह दूरी जो इसका प्रयोग-विन्दु खसकता है।

अत. भाग देने से,

$$\text{दक्षता} = \frac{P_0}{P} = \frac{\text{सामर्थ्य जब घर्षण न हो}}{\text{वास्तविक सामर्थ्य}}\,।$$

हम घर्षणीय प्रतिरोध को कभी भी बिल्कुल दूर नहीं कर सकते हैं और न मशीन को बिना भार का ही बना सकते हैं, इसलिये कुछ न कुछ कर्म इन दो कारणों से अवश्य ही नष्ट हो जायगा। अत मशीन की दक्षता कभी भी इकाई के बराबर बड़ी नहीं हो सकती। दक्षता इकाई के जितनी निकट होती है मशीन उतनी ही अच्छी होती है।

कोई भी मशीन ऐसी नहीं होती है जिसके प्रयोग मे हम कर्म की उत्पत्ति कर सकें, और व्यवहार में मशीन के प्रयोग मे चाहे वह कितनी ही चिकनी और निर्दोष क्यों न हो कुछ न कुछ कर्म हमेशा नष्ट हो जाता है। किसी भी मशीन का केवल एकमात्र लाभ यह होता है कि जिस बल को हम प्रयोग करें वह बहुगुणित हो जाय और साथ ही साथ, बल के द्वारा कार्य की हुई दूरी भी बहुत कम हो।

१९९—रूक्ष पेंच का. समतुलन। रूक्ष पेंच में सामर्थ्य और प्रतिरोध का सम्बन्ध मालूम करना।

धारा १७८ के ही संकेतों को कार्य में लाते हुये मान लो कि पेंच नीचे खसकने की सीमा पर है अतः घर्षण चूड़ियों पर ऊपर की ओर कार्य करेगा। [धारा १७६ की ही भाँति उसका परिच्छेद आयताकार होगा।]



इस स्थिति में गुटके के ऊर्ध्वाधर दबाव

R (कोज्या $a+\mu$ ज्या a), S (कोज्या $a+\mu$ ज्या a),...

हैं, और इन दबावों के क्षैतिज अवयव

R (ज्या $a-\mu$ कोज्या a), S (ज्या $a-\mu$ कोज्या a),...हैं।

अतः धारा १७८ के समीकरण (१) और (२)

$W=(R+S+T+...)$(कोज्या $a+\mu$ज्या a) ... ... (१),

और $P.b=a\,(R+S+T+..)$(ज्या $a-\mu$ कोज्या a) ... (२)

हो जाते हैं।

अतः भाग देने से

$$\frac{P.b}{W}=a\,\frac{\text{ज्या } a-\mu \text{ कोज्या } a}{\text{कोज्या } a+\mu \text{ ज्या } a}=a\,\frac{\text{ज्या } a \text{ कोज्या } \lambda-\text{कोज्या } a \text{ ज्या } \lambda}{\text{कोज्या } a \text{ कोज्या } \lambda+\text{ज्या } a \text{ ज्या } \lambda}$$

$$=a\,\frac{\text{ज्या } (a-\lambda)}{\text{कोज्या } (a-\lambda)}\text{।}$$

$$\therefore \frac{P}{W}=\frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (a-\lambda).$$

इसी प्रकार यदि पेंच ऊपर की ओर खिसकने की सीमा पर हो, तो μ का चिन्ह बदल कर,

$$\frac{P_1}{W}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\text{ज्या } a+\mu \text{ कोज्या } a}{\text{कोज्या } a-\mu \text{ ज्या } a}=\frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (a+\lambda).$$

यदि सामर्थ्य का कोई मान P और P_1 के बीच में हो, तो पेंच समतुलित अवस्था में होगा परन्तु घर्षण सीमान्त न होगा।

यह ध्यान रहे कि यदि पेंच का कोण α घर्षण-कोण λ के बराबर हो तो सामर्थ्य P का मान शून्य होगा। इस स्थिति में पेंच केवल अपनी चूड़ियों के घर्षण से रुका हुआ समतुलित अवस्था में रहेगा। यदि $\alpha < \lambda$, तो P ऋण होगा अर्थात् पेच नीचे की ओर तब तक नहीं खसकेगा जब तक उस पर दबाव न डाला जाय।

उदाहरण १। यदि किसी पेंच की परिधि 2 इंच, उसकी चूड़ियों के बीच की दूरी आधी इंच और घर्षण गुणक $\frac{1}{5}$ हो, तो बताओ सामर्थ्य किन सीमाओं के बीच पड़ेगी, यदि पेंच एक हन्डरवेट भार के एक पिंड को सम्हालते हुये समतुलित अवस्था में हो, और सामर्थ्य-भुजा की लम्बाई 12 इंच हो।

इस प्रश्न में $2\pi a = 2$, और $2\pi a$ स्पज्या $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\therefore\ a = \frac{1}{\pi}, \text{ और स्पज्या } \alpha = \tfrac{1}{4}.$$

और स्पज्या $\lambda = \frac{1}{5}$, और $b = 12$.

अत. वह बल जो पेंच को ठीक सम्हाल सकेगा

$$= 112 \times \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha - \lambda) = 112 \times \frac{1}{12\pi} \times \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{112}{12\pi} \times \frac{1}{21}$$

$$= \frac{14}{99} \text{ पौ॰ भार} = \cdot 1\dot{4} \text{ पौ॰ भार}।$$

वह बल जो पेंच को ठीक ऊपर की ओर खसका सकेगा

$$= 112 \times \frac{a}{b} \text{ स्पज्या } (\alpha + \lambda) = \frac{112}{12\pi} \times \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{112}{12\pi} \times \frac{9}{19}$$

$$= 1\frac{85}{209} \text{ पौ॰ भार} = 1\cdot 4067 \text{ पौ॰ भार}।$$

अतः पेंच समतुलित अवस्था में रहेगा यदि सामर्थ्य $\cdot 1\dot{4}$ और $1\cdot\dot{4}067$ पौ॰ भारों के बीच में हो।

यदि पेंच चिकना हो तो इष्ट बल

$$= 112\,\frac{a}{b} \text{ स्पज्या } \alpha = \frac{112}{12\pi} \times \tfrac{1}{4} = \frac{49}{66} = \cdot 742 \text{ पौ॰ भार}।$$

इसलिये धारा १९८ से, दक्षता $= \frac{\cdot 742}{1 \cdot 4067} = 527$

उदाहरण २। पीटे हुये लोहे का लकड़ी पर घर्षण-गुणक ·15 है। सिद्ध करो कि पेंच की चूड़ी के झुकाव का लघुतम कोण स्पज्या$^{-1}$ $\frac{3}{20}$ होगा यदि वह लकड़ी के एक सुराख में केवल अपने भार ही के कारण सरक जाता है।

उदाहरण ३। यदि एक पेंच की परिधि $\frac{3}{8}$ इंच, घर्षण-गुणक ·15 और शक्ति-भुजा की लम्बाई 12 इंच हो, और यदि एक इंच में तीन चूड़ियाँ हों, तो वे बल मालूम करो जो क्रमश: पेंच को जब वह एक भार W सम्हाले हुये है, ठीक सम्हाल सके और ठीक चला सके। सामर्थ्य का मान भी मालूम करो जब पेंच चिकना है और उसकी दक्षता भी निकालो।

उत्तर : $\frac{W}{16\pi}(\cdot 07)$, $\frac{W}{16\pi}(\cdot 385)$, $\frac{W}{16\pi}(\cdot 2)$, 577

उदाहरण ४। सिद्ध करो कि एक पेंच की दक्षता महत्तम होगी यदि उसका कोण $45° - \frac{\lambda}{2}$ हो।

यदि घर्षण है, तो भार W उठाने के लिये आवश्यक बल $= W\frac{a}{b}$ स्पज्या $(\alpha+\lambda)$, और जब घर्षण नहीं है, तो बल $= W.\frac{a}{b}$ स्पज्या α.

धारा १९८ की ही भाँति दक्षता E = इनकी निष्पत्ति

$$= \frac{\text{स्पज्या } \alpha}{\text{स्पज्या}(\alpha+\lambda)} = \frac{\text{ज्या } \alpha \text{ कोज्या } (\alpha+\lambda)}{\text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } (\alpha+\lambda)}.$$

$$\therefore\ 1-E = 1 - \frac{\text{ज्या } \alpha \text{ कोज्या } (\alpha+\lambda)}{\text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } (\alpha+\lambda)} = \frac{\text{ज्या } \lambda}{\text{कोज्या } \alpha \text{ ज्या } (\alpha+\lambda)}$$

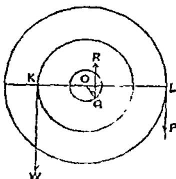
$$= \frac{2 \text{ ज्या } \lambda}{\text{ज्या } (2\alpha+\lambda) + \text{ज्या } \lambda}.$$

$\therefore$ E तब महत्तम होगी जब $1-E$ लघुतम होगी,

अर्थात् जब, ज्या $(2\alpha+\lambda)$ महत्तम होगी,

अर्थात्, जब $2\alpha+\lambda=90°$, अर्थात् $\alpha=45°-\frac{\lambda}{2}$.

२००—चक्र और धुरी जिसकी चूल रूक्ष धुरी पर रखी है।



मान लो बीच का वृत्त धारा १५९ के चित्र (जो बहुत बढ़ा कर दिखलाया गया है) के चूल A और B को प्रदर्शित करता है जब उसे सिरे से देखते हैं।

इन चूलों और धुरी, जिन पर वे रखे हुये हैं, के बीच की परिणामी क्रिया ऊर्ध्वाधर होगी क्योंकि वह P और W से समतुलित है।

यदि हम यह भी मान लें कि P, W को ठीक पराजित करने की सीमा पर हैं तो यह स्पर्श-बिन्दु Q पर खींचे गये अभिलम्ब से कोण λ, घर्षण-कोण, बनायेगी।

अतः Q चूल के सबसे नीचे के बिन्दु पर नहीं हो सकता है परन्तु यह वहाँ होगा जहाँ चित्र में दिखलाया गया है जहाँ OQ ऊर्ध्वाधर से कोण λ बनाती है। इसलिये Q पर परिणामी प्रतिबल ऊर्ध्वाधर होगा।

$\because R, P$ और W से समतुलित है,

$\therefore R=P+W$ ... ... (१).

O पर घूर्ण लेने पर

$$P.b - R.c \text{ ज्या } \lambda = W.a \quad \ldots \quad (२),$$

जहां c चूल तथा b और a चक्र और धुरी की त्रिज्यायें हैं (धारा १५९ की भांति)।

(१) और (२) को हल करके,

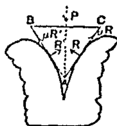
$$P = W \frac{a + c \text{ ज्या } \lambda}{b - c \text{ ज्या } \lambda}.$$

यदि P केवल इतना है कि वह W को ठीक सम्हाल सके अर्थात् यदि मशीन $\int$ दिशा में चलने की सीमा पर हो, तो λ के चिन्ह को बदल कर,

$$P_1 = W \frac{a - c \text{ ज्या } \lambda}{b + c \text{ ज्या } \lambda}.$$

इस स्थिति में स्पर्श-बिन्दु Q. O से खींचे गये ऊर्ध्वाधर के बाईं ओर होगा।

२०१—टंक लोहे अथवा धातु का एक टुकड़ा होता है जिसमें दो समतल फलक होते हैं जो एक तीक्ष्ण धार पर मिलते हैं। इसे लकड़ी अथवा और सख्त चीजों के चीरने के काम में लाते हैं। ऊपर के फलक पर हथौड़े से बराबर चोटें मार कर इसकी धार को भीतर की ओर घुसाते हैं।



टंक की क्रिया का प्रश्न वास्तव में गत्यात्मक प्रश्न है।

हम केवल स्थिति सम्बन्धी प्रश्न पर विचार करेंगे जब टंक के ऊपरी फलक पर बल लगा कर उसे ठीक समतुलित अवस्था में रखा जाता है।

मान लो ABC टंक का परिच्छेद है और मान लो इसके फलक आधार BC से बराबर कोण बनाते हैं। मान लो कोण $CAB = a$.

मान लो ऊपर के फलक पर P बल लगाया गया है, और R और R लकड़ी के उन बिन्दुओं पर अभिलम्ब प्रतिबल हैं जहाँ टंक लकड़ी को स्पर्श

करता है, और μR और $\mu R'$ घर्षण हैं, यदि यह मान लिया गया है कि टक भीतर घुमने की सीमा पर है ।

हम यह मान लेंगे कि बल P, BC के मध्य-बिन्दु पर लगाया गया है और उसकी दिशा BC पर लम्ब है और इसलिये कोण BAC को समविभाजित करती है।

BC और उसकी लम्ब दिशा विश्लिष्ट किया, तो

$$\mu R \text{ ज्या} \frac{a}{2} - R \text{ कोज्या} \frac{a}{2} = \mu R' \text{ ज्या} \frac{a}{2} - R' \text{ कोज्या} \frac{a}{2} \quad \ldots \quad (१),$$

और $$P = \mu (R+R') \text{ कोज्या} \frac{a}{2} + (R+R') \text{ ज्या} \frac{a}{2} \quad \ldots \quad (२).$$

समीकरण (१) में $R=R'$, और इस लिये (२) में

$$P = 2R\left(\mu \text{ कोज्या} \frac{a}{2} + \text{ ज्या} \frac{a}{2}\right).$$

अतः $$\frac{2R}{P} = \frac{1}{\mu \text{ कोज्या} \frac{a}{2} + \text{ज्या} \frac{a}{2}} = \frac{\text{कोज्या } \lambda}{\text{ज्या} \frac{a}{2} \text{ कोज्या } \lambda + \text{कोज्या} \frac{a}{2} \text{ ज्या } \lambda}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \lambda}{\text{ज्या} \left(\frac{a}{2} + \lambda\right)},$$

जहां λ घर्षण-कोण है ।

टंक के चीरने की सामर्थ्य को R से नापते हैं । किसी दिये हुये बल P के लिये यह चीरने की सामर्थ्य तब महत्तम होगी जब a लघुतम हो ।

सैद्धान्तिक रूप में यह तब सम्भव है जब a शून्य हो अर्थात् जब टंक अत्यल्पीय शक्ति का हो । व्यवहार में टंक में चीरने की बड़ी से बड़ी शक्ति तब होती है जब मजबूती के विचार में उसका कोण छोटे से छोटा हो।

२०२—यदि टंक और लकड़ी के बीच में कोई घर्षण न हो (यद्यपि ऐसा अनुमान व्यावहारिक रूप में असम्भव है), तो $\lambda=0$, और इसलिये

$$\frac{2R}{P} = \frac{1}{\text{ज्या} \frac{a}{2}} = \text{व्युज्या} \frac{a}{2}.$$

२०३—यदि लकड़ी द्वारा टंक पर प्रयोग किया गया मर्पीडन बल पर्याप्त मात्रा में हो तो बल P टंक को नीचे चलाने के लिये काफी न होगा ; अतः इस दशा में टक बाहर फेंके जाने की सीमा पर होगा ।

यदि ऐसी अवस्था में P का मान P_1 है, तो इसका मान धारा २०१ में μ के चिन्ह को बदल कर निकाला जा सकता है, इसलिये

$$P_1 = 2R\left(\text{ज्या}\frac{a}{2} - \mu \text{ कोज्या } \frac{a}{2}\right) = 2R\,\frac{\text{ज्या}\left(\frac{a}{2}-\lambda\right)}{\text{कोज्या}\,\lambda}.$$

यदि $\frac{a}{2} > \lambda$, तो P_1 का मान धन होगा ।

यदि $\frac{a}{2} < \lambda$ तो P_1 का मान ऋण होगा और इसलिये टक बाहर फिसल जाने की सीमा पर होगा यदि उसके ऊपर के फलक पर खिंचाव का प्रयोग किया जाय ।

यदि $\frac{a}{2} = \lambda$, तो टंक बिना किसी बल के लगाये ठीक चिपट जायगा ।

उदाहरण । सिद्ध करो कि पेचकश मे उत्पादित बल, जिसमें दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की दूरी c है और सामर्थ्य $2b$ लम्बी छड़ के सिरे पर लगाई जाती है, वही है जो एक पतले द्विसमबाहु टक में उत्पन्न होती है जिसका कोण a इस प्रकार का है कि

$$\text{ज्या}\,\frac{a}{2} = c \div 4\pi b$$

२०४—घर्षण मशीनों की व्यावहारिक क्रियाओं पर इतना प्रभाव डालता है कि सैद्धान्तिक अन्वेषणों मे कोई अधिक वास्तविक लाभ नहीं होता और किसी विशेष मशीन के लिये प्रयोग का ही आश्रय लेना पड़ता है । सभी प्रकार की मशीनों के लिये एक ही रीति प्रयुक्त की जाती है ।

वेग-निष्पत्ति प्रयोग द्वारा निकाली जा सकती है ; क्योंकि, सभी मशीनों में यह उस भिन्न के बराबर होती है जिसका अंश वह दूरी है जो

सामर्थ्य चलती है और जिसका हर वह संगत दूरी है जो भार अथवा प्रतिरोध चलता है। मान लो यह n है।

मान लो उठाया हुआ भार W है, तो सैद्धान्तिक सामर्थ्य $P_0 \cdot \frac{W}{n}$ होगी जहां घर्षण नहीं है। प्रयोग द्वारा सामर्थ्य P का वास्तविक मान मालूम करो जो W को ठीक उठा सके। मशीन का वास्तविक यांत्रिक लाभ $\frac{W}{P}$ है, और धारा १९८ में इसकी दक्षता $\frac{P_0}{P}$ है। दक्षता और वेग-निष्पत्ति का गुणनफल $= \frac{P_0}{P} \cdot \frac{W}{P_0} = \frac{W}{P} =$ यांत्रिक लाभ।

२०५—उदाहरण के रूप में उस अन्तरीय चक्र और धुरी के माडल को लो जिसपर कुछ प्रयोग किये गये थे और जो अच्छी अवस्था में न था और न प्रयोग से पहले साफ ही किया गया था और न उसकी अथवा उसकी घिरनी की चूल पर तेल ही लगाया गया था।

धारा १९४के संकेत में a, b और c के मान $1\frac{1}{2}$, 3, और $6\frac{3}{4}$ इंच निकले थे, इसलिये वेग-निष्पत्ति का मान

$$n = \frac{2b}{c-a} = \frac{2 \times 6\frac{3}{4}}{3 - 1\frac{1}{2}} = 9.$$

इस मान की जाँच प्रयोग द्वारा भी की गई थी, क्योंकि यह मालूम हुआ था कि जब W एक इंच ऊपर चढ़ता था, तो P नौ इंच नीचे उतरता था।

P को पलड़े में रखे हुये भारों से जिसका भार भी P में सम्मिलित था नापा गया था, इसी प्रकार W भी नापा गया था।

घिरनी का भार भी जिसपर W लगा हुआ था W के भार में सम्मिलित कर लिया गया था।

P और W के ग्रामों में संगत मान नीचे की सारिणी में दिये गये हैं। P का मान वह था जो भार W को ठीक सम्हालता था। तीसरे स्तम्भ में P_0 के संगत मान अर्थात् वे मान जिनकी आवश्यकता होती यदि घर्षणीय प्रतिरोध न होते, दिये गये हैं।

W	P	$P_0=\frac{W}{n}$	$E=\frac{P_0}{P}$	$M=\frac{W}{P}$
50	28	5·55	2	1·79
100	36	11 11	·31	2·78
150	45	16 67	37	3·3
250	60	27·74	46	4·17
450	90	50	56	5
650	119	72 22	61	5·46
850	147	94 44	·64	5·78
1050	175	116·67	67	6
1250	203	138 88	·68	6·16
1450	232	161·11	694	6 25

चौथे स्तम्भ में दक्षता E के मान दिये हुये हैं और अन्तिम स्तम्भ में यांत्रिक लाभ M के मान दिये गये हैं।

ऊपर के परिमाणों को वर्गांकित कागज पर अंकित करने पर, जिसे विद्यार्थी स्वयं कर सकता है, यह मालूम होगा कि P के मानों को प्रदर्शित करने वाले बिन्दु लगभग उस सरल रेखा पर होंगे जो तीसरे और अन्तिम मानों से जाती है। अतः लेखा-चित्र के सिद्धान्त के अनुसार P और W का सम्बन्ध $P=aW+b$ रूप का होगा, जहाँ पर a और b स्थिर राशियाँ हैं।

क्योंकि $P=45$ जब $W=150$ और $P=232$ जब $W=1450$.

$$\therefore\ 45=150a+b \text{ और } 232=1450a+b.$$

हल करके $a=\cdot144$ और $b=23\cdot4$ लगभग, अतः $P=\cdot144W+23\cdot4$.

इसे मशीन का नियम कहते हैं।

अब $$P_0=\frac{1}{9}W=\cdot111W.$$

अतः $$E=\frac{P_0}{P}=\frac{\cdot111W}{\cdot144W+23\cdot4},$$

और $$M=\frac{W}{P}=\frac{W}{\cdot 144W+23\cdot 4}.$$

इनमे किसी भी भार W के लिये E और M मालूम हो जाते हैं।

ज्यों ज्यों W बढ़ता है E और M के मान भी बढते है। यदि E के मान को W के सब मानो के लिये सही माने, तो उसका सबसे बड़ा मान तब होगा जब W अनन्त बडा हो और $=\frac{\cdot 111}{\cdot 144}=\cdot 77$ लगभग, अर्थात् इस मशीन मे कम से कम 23% कर्म नष्ट हो जाता है।

यान्त्रिक लाभ का सबसे बड़ा संगत मान $=\frac{1}{\cdot 144}=7$ लगभग।

यदि प्रयोग से पहले मशीन भली प्रकार साफ़ कर ली जाती और उसमें तेल लगा लिया जाता, तो अधिक सही परिणाम प्राप्त होते।

२०६—जैसा कि पिछली धारा के उदाहरण से स्पष्ट है किसी दूसरी मशीन में भी वास्तविक दक्षता इकाई से कही कम होती है।

उन मशीनों से जिनमे कुछ कम दक्षता होती है प्रायः एक व्यवहारिक लाभ होता है।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि किसी भी मशीन में जिसमें प्रयुक्त सामर्थ्य का घर्षण पर कोई प्रभाव नहीं होता, यदि दक्षता $\frac{1}{2}$ से कम हो तो भार जब तक उस पर कोई सामर्थ्य न लगाई जाय, अपने आप नीचे की ओर नहीं उतरता।

ऐसी मशीनों के उदाहरण वे पेंच हैं जिनका पिच छोटा होता है और जिनमे सामर्थ्य, धारा १७८ की भांति, क्षैतिज दिशा में लगाई जाती है, और वे आनत धरातल हैं जिनमें सामर्थ्य धारा १९४ की भांति, धरातल के ऊपर की ओर लगाई जाती है।

उन मशीनों में जिनमें घर्षण प्रयुक्त सामर्थ्य पर निर्भर रहता है कोई ऐसा व्यापक नियम सिद्ध नही किया जा सकता, और प्रत्येक अवस्था में पृथक पृथक रीति से विचार करना पड़ता है। परन्तु यह एक व्यापक नियम माना जा सकता है कि जहां सामर्थ्य का घर्षण पर बहुत कम प्रभाव हो

वहाँ भार स्वयं नीचे नहीं उतरता यदि दक्षता $\frac{1}{2}$ से कम है। ऐसी मशीन को कहा जाता है कि वे नहीं 'उलटती' हे।

उदाहरणार्थ, साधारण रूप से घनी अन्तरीय घिरनी में (धारा १६५) दक्षता $\frac{1}{2}$ से कम होती है। इसलिये जब तक उस पर कोई बल P न लगाया जाय, अर्थात् यदि मशीन को छोड़ दिया जाय और जंजीर को चलने दिया जाय तो भार W नीचे नहीं उतरता।

यह न उलटने वाला गुण बहुत अंशों तक कम दक्षता की कमी को पूरा कर देता है।

चक्र और धुरी में यान्त्रिक लाभ प्राय. अधिक होता है और दक्षता $\frac{1}{2}$ से कहीं अधिक होती है। परन्तु यह बात कि मशीन उलट जाती है, उसे अन्तरीय घिरनी से अधिक उपयोगी नहीं बना देती।

जो विद्यार्थी मशीनों की व्यावहारिक क्रियाओं का अधिक ज्ञान प्राप्त करना चाहता है वह सर राबर्ट बाल के एक्सपेरीमेन्टल मेकेनिक्स अथवा व्यावहारिक यंत्र विज्ञान पर पुस्तकें देखे।

उदाहरणमाला ३२

१। 6 हण्डरवेट के एक भार को एक रूक्ष आनत धरातल पर खींचने में कितना कर्म व्यय होगा, जब धरातल की ऊंचाई 3 फुट, आधार 20 फुट, और घर्षण-गुणक $\frac{2}{15}$ है?

२। 10 टन का एक भार आधे घण्टे में एक आनत धरातल पर जिसका झुकाव 30° का है, 330 फुट ऊपर खींचा गया है। यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है तो बताओ कितना कर्म व्यय होगा और उस॰ इंजन की अश्व-सामर्थ्य मालूम करो जो इस कर्म को कर सकेगा।

३। एक तालाब जो 24 फुट लम्बा, 12 फुट चौडा, और 16 फुट गहरा है, एक कुएँ के पानी से भरा गया है जिसकी सतह हमेशा तालाब के शिखर से 80 फुट नीची रहती है। बताओ तालाब के भरने में कितना कर्म

किया गया है और उस इंजन की अश्व-सामर्थ्य मालूम करो, जिसकी दक्षता 5 है और जो तालाब को 4 घण्टों में भर देता है।

४। एक वाष्प-इंजन के वृत्ताकार पिस्टन (पिचकारी) का व्यास 60 इंच है और वह एक मिनट में 11 चोटें करता है। प्रत्येक चोट की लम्बाई 8 फुट है। पिस्टन के प्रति वर्ग इंच में मध्यमान दबाव 15 पौं० रहता है और इंजन की दक्षता 65 है। यह मान करके कि कुछ भी कर्म नष्ट नहीं होता बताओ इंजन 300 फुट गहरे कुएँ से एक घण्टे में कितने घन फुट पानी उठायेगा।

५। एक इंजन के पिस्टन का व्यास 80 इंच है। वाष्प का मध्यमान दबाव 12 पौं० प्रतिवर्ग इंच है। चोट की लम्बाई 10 फुट और प्रति मिनट द्विक चोटों की संख्या 11 है। इंजन 500 फ़ैदम की गहराई से प्रति मिनट 42½ घनफुट पानी उठा सकता है। सिद्ध करो कि उसकी दक्षता लगभग ·6 है।

६। चक्र और धुरी की त्रिज्यायें 4 फुट और 6 इंच हैं। यदि 200 पौं० भार के प्रतिरोध को पराजित करने के लिये 56 पौं० भार के बल की आवश्यकता पड़ती है तो मशीन की दक्षता क्या है?

७। 'ब्लाक एण्ड टैकिल' (घिरनियों की दूसरी श्रेणी) के कुछ प्रयोगों में वेग-निष्पत्ति 4 थी, उठाये गये भार 10, 80 और 160 पौं० थे, और उनको संगत सामर्थ्य के मान 23, 58 और 85 पौं० थे। प्रत्येक स्थिति में दक्षता मालूम करो।

८। किसी मशीन मे यह ज्ञात हुआ कि क्रमशः 12 और 75 पौं० भार के सामर्थ्य से 700 और 300 पौं० भार के प्रतिरोध पराजित किये जा सकते हैं। यह मान कर कि $P=a+bW$, a और b के मान मालूम करो।

९। एक स्क्रू-जैक के कुछ प्रयोगों में भार W के मान 150, 180, 210, 240, और 270 पौं० भार के बराबर हैं और सामर्थ्य P के संगत मान 20·9, 22·7, 25·75, 28·4, और 31·4 पौं० भार के बराबर हैं। इन फलों को एक वर्गांकित कागज पर अंकित करो और यह मान कर कि $P=a+bW$, a और b के लगभग मान मालूम करो।

१०। 'ब्लाक एण्ड टैकिल' (घिरनियों की दूसरी श्रेणी) के कुछ प्रयोगों में W (नीचे के गुटके का भार सम्मिलित करके) और P के ग्राम भारों में निम्नलिखित मान थे :

W=75, 175, 275, 475, 675, 875, 1075,

P=25, 48, 71, 119, 166, 214, 264

नीचे के गुटके में पाँच डोरियाँ थीं। P और W का लगभग सम्बन्ध और दक्षता और यांत्रिक लाभ के संगत मान मालूम करो।

P, P_0, E, और M के लेखा-चित्र भी खींचो।

११। निम्नलिखित सारिणी में एक क्रेन पर रखा हुआ भार टनों में और संगत सामर्थ्य पौंड भार में दी गई है :

भार 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11

सामर्थ्य 9, 20, 28, 37, 42, 51, 56.

मशीन का नियम मालूम करो, और 5 और 10 टन भारों के लिये दक्षता मालूम करो यदि वेग-निष्पत्ति 500 है।

१२। एक स्क्रू-जैक से, जिसका पिच $\frac{1}{4}$ इंच है, कोई भार उठाया जाता है। बल 15 इंच लम्बे एक लीवर के सिरे पर लम्ब दिशा में लगाया जाता है। भारों के मान टनों में और संगत बलों के मान पौंडों में निम्नलिखित सारिणी में दिये गये हैं।

भार 1, 2·5, 5, 7, 8, 10

बल 24, 32, 46, 57, 63, 73.

मशीन का नियम मालूम करो और 4 और 9 टन भारों के लिये उसकी दक्षता निकालो।

अध्याय १४

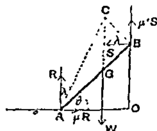
घर्पण (क्रमशः)

(Friction—*Continued*)

२०७—इस अध्याय में हम घर्पण सम्बन्धी प्रश्नों के हल किये हुये कुछ और उदाहरण देंगे।

उदाहरण १। एक सम सीढ़ी, जिसका एक सिरा भूमि पर और दूसरा सिरा एक ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है, समतुलित अवस्था में है। भूमि और दीवार दोनों रूक्ष हैं और उनके घर्षण-गुणक क्रम से μ और μ' है। यदि सीढ़ी दोनों पिंडों पर फिसलने की सीमा पर है, तो सीढ़ी का क्षैतिज से झुकाव मालूम करो।

मान लो AB सीढ़ी है और G उसका गुरुत्व-केन्द्र है, तथा R और S क्रम से A और B पर अभिलम्ब प्रतिबल हैं। क्योंकि सीढ़ी का सिरा A दीवार से दूर फिसलने की सीमा पर है इसलिये घर्षण μR दीवार की ओर होगा, और सिरा B ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर फिसलने की सीमा पर है इसलिये घर्षण $\mu' S$ ऊपर की ओर कार्य करेगा।



मान लो सीढ़ी का भूमि से झुकाव θ है, और उसकी लम्बाई $2a$ है। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में विश्लिष्ट किया, तो

$$\mu R = S \quad \ldots \quad \ldots \quad (1),$$

और

$$R + \mu' S = W \quad \ldots \quad \ldots \quad (2).$$

A पर घूर्ण लिया, तो

$W.a$ कोज्या $\theta=\mu' S.2a$ कोज्या $\theta+S.2a$ ज्या θ,

$\therefore W$ कोज्या $\theta=2S(\mu'$ कोज्या $\theta+$ ज्या $\theta)$ .... (३).

(१) और (२) से, $\mu(W-\mu' S)=S$,

और $\therefore \mu W=S(1+\mu\mu')$ .. (४).

(३) और (४) से, भाग देकर,

$$\frac{\text{कोज्या }\theta}{\mu}=\frac{2(\mu'\text{ कोज्या }\theta+\text{ज्या }\theta)}{1+\mu\mu'},$$

$\therefore$ कोज्या $\theta(1-\mu\mu')=2\mu$ ज्या θ.

अतः $$\text{स्पज्या }\theta=\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}.$$

वैकल्पिक विधि :

मान लो A और B पर λ और λ' घर्षण-कोण हैं। A पर खींचे गये अभिलम्ब से λ कोण बनाती हुई AC रेखा खींचो, और B पर खींचे गये अभिलम्ब से λ' कोण बनाती हुई BC रेखा खींचो जैसा चित्र में दिखलाया गया है।

धारा १८९ से, AC और BC, A और B पर परिणामी प्रतिबलों की दिशायें हैं। क्योंकि सीढ़ी इन परिणामी प्रतिबलों और भार से समतुलित अवस्था में रहती है, इसलिये इनकी क्रिया-रेखायें एक बिन्दु पर मिलेंगी और इसलिये G से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा भी C से जायगी।

अब धारा ७९ के सूत्र (१) से

$(a+a)$ कोस्पज्या $CGB=a$ कोस्पज्या $ACG-a$ कोस्पज्या BCG,

अर्थात् $$2\text{ स्पज्या }\theta=\text{कोस्पज्या }\lambda-\text{ स्पज्या }\lambda'=\frac{1}{\mu}-\mu'.$$

$$\therefore \text{ स्पज्या }\theta=\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}.$$

उदाहरण २। एक सीढ़ी दी हुई अवस्था में इस प्रकार रखी हुई है कि उसका एक सिरा भूमि पर और दूसरा एक ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। यदि भूमि

और दीवार दोनों रूक्ष हैं, और घर्षण-कोण क्रम से λ और λ' हैं, तो लेखा-चित्रीय रचना द्वारा बताओ कि एक आदमी उसके ऊपर कितना ऊँचा चढ़ सकता है कि सीढ़ी न फिसलने पावे।

मान लो AB सीढ़ी है (चित्र, उदाहरण १)

A और B पर क्रमशः भूमि और दीवार पर खींचे गये अभिलम्बों से घर्षण-कोण बनाती हुई AC और BC रेखायें खींचो।

CG को ऊर्ध्वाधर खींचो जो AB को G पर मिले। यदि आदमी और सीढ़ी का गुरुत्व-केन्द्र A और G के बीच में हो तो सीढ़ी समतुलित अवस्था में रहेगी, अन्यथा वह फिसल जायगी।

क्योंकि यदि गुरुत्व-केन्द्र G और B के बीच में हो तो उस से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा BC को, जो B पर घर्षण की सीमान्त दिशा है, P विन्दु पर इस प्रकार मिलेगी कि $\angle PAR$, A पर घर्षण-कोण से बड़ा होगा, और इसलिये समतुलित अवस्था असम्भव होगी।

यदि यह गुरुत्व-केन्द्र G और A के बीच में हो तो समतुलित अवस्था सम्भव है, क्योंकि, यद्यपि A पर सीमान्त घर्षण है तथापि इस गुरुत्व-केन्द्र से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा AC को विन्दु P पर इस प्रकार मिलेगी कि कोण $PBS < \lambda'$, अतः समतुलित अवस्था सम्भव है। इसी प्रकार हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि यदि B पर सीमान्त घर्षण है तो भी समतुलित अवस्था सम्भव है।

यदि सीढ़ी का गुरुत्व-केन्द्र G_1 है और G_2 आदमी के चढ़ने का सबसे ऊँचा स्थान हो, और W_1 और W_2 क्रमसे उनके भार हों, तो G_2 सम्बन्ध $W_1 \cdot GG_1 = W_2 \cdot GG_2$ से निकल आवेगा।

उदाहरणमाला ३३

१। 13 फुट लम्बी एक सम सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है और दूसरा सिरा दीवार से 5 फुट

दूर रूक्ष क्षैतिज धरातल के एक विन्दु पर रखा हुआ है। यदि सीढ़ी का भार 56 पौं० है तो सीढ़ी और दीवार के बीच का घर्षण मालूम करो।

२। एक सम सीढ़ी का एक सिरा क्षैतिज फर्श पर और दूसरा ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है। इनके घर्षण-गुणक क्रमसे $\frac{3}{7}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। सीढ़ी का झुकाव उस अवस्था में मालूम करो जब वह फिसलने को हो।

३। यदि पिछले प्रश्न में घर्षण-गुणक दोनों दशा में $\frac{1}{3}$ हो, तो सिद्ध करो की सीढ़ी फिसल जायगी यदि ऊर्ध्वाधर से उसका झुकाव स्पज्या$^{-1}\frac{3}{4}$ है।

४। एक सम सीढ़ी समतुलित अवस्था मे रखी है। उसका एक सिरा रूक्ष फर्श पर रखा हुआ है, जिसका घर्षण-गुणक μ है और सीढ़ी का दूसरा सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि ऊर्ध्वाधर से उसका झुकाव स्पज्या$^{-1}(2\mu)$ है।

५। एक सम सीढ़ी का एक सिरा दीवार पर रखा हुआ है। यदि भूमि और दीवार दोनों बराबर रूक्ष हैं, और उनका घर्षण-गुणक स्पज्या θ है, तो सिद्ध करो कि सीढ़ी का ऊर्ध्वाधर से सीमान्त झुकाव 2θ है।

जब सीढ़ी इस अवस्था मे है तो क्या विना उसके फिसले हुये उसपर चढ़ा जा सकता है?

६। एक सम सीढ़ी समतुलित अवस्था में है। उसका एक सिरा एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर और दूसरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। एक आदमी उस पर चढ़ता है। सिद्ध करो कि वह आधी दूर से अधिक नहीं जा सकता।

७। एक सम सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी दीवार पर और दूसरा भूमि पर जिसका घर्षण-गुणक $\frac{3}{4}$ है रखा हुआ है। यदि सीढ़ी का भूमि से झुकाव 45° हो, तो सिद्ध करो कि एक आदमी जिसका भार सीढ़ी के भार के बराबर है, ठीक सीढ़ी के शिखर तक बिना सीढ़ी के फिसले चढ़ सकता है।

८। 70 फुट लम्बी एक सम सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार से 45° का कोण बनाती है। सीढ़ी, दीवार और भूमि के बीच के घर्षण-गुणक क्रम से $\frac{1}{3}$

और $\frac{1}{3}$ है। यदि एक आदमी, जिसका भार सीढ़ी के भार का आधा है, सीढी पर चढे तो बताओ वह कहाँ पर होगा जब सीढी फिसलने की अवस्था में आ जायगी ?

यदि अब एक लड़का सीढी के सबसे नीचे डंडे पर खड़ा हो जाय तो बताओ उसका लघुतम भार क्या होना चाहिये कि आदमी सीढी के शिखर तक पहुँच सके ?

९। दो बराबर सीढ़ियाँ, जिनके भार w हैं, एक दूसरे पर झुकी हुई खड़ी हैं और उनके सिरे एक रूक्ष क्षैतिज फर्श पर रखे हैं। यदि घर्षण-गुणक μ और दोनों सीढ़ियों के बीच का कोण $2a$ हो, तो बताओ सीढियों के शिखर पर कौनसा भार रखा जाय कि वे फिसल जायें।

अपने उत्तर के अर्थ की व्याख्या करो जब स्पज्या $a > 2\mu$ अथवा $< \mu$.

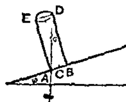
१०। एक सम सीढी क्षैतिज से 45° का कोण बनाती है, और उसका ऊपर का सिरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर और नीचे का सिरा भूमि पर रखा हुआ है। यदि सीढी, भूमि और दीवार के बीच में क्रमशः सीमान्त घर्षण-गुणक μ और μ' हों, तो सिद्ध करो कि वह लघुतम क्षैतिज बल जो नीचे के सिरे को दीवार की ओर खींचेगा

$$\frac{1}{2} W \frac{1+2\mu-\mu\mu'}{1-\mu'} \text{ होगा।}$$

११। प्रश्न ९ में यदि भार एक सीढी के मध्य-बिन्दु पर रखा जाय और वह इतना भारी हो कि सीढी को फिसला सके, तो सिद्ध करो कि पहले दूसरी सीढी फिसलेगी।

२०८—उदाहरण १। एक सम बेलन आधार के बल एक रूक्ष आनत तल पर रखा हुआ है, और तल का क्षैतिज से झुकाव धीरे धीरे बढ़ाया जा रहा है। सिद्ध करो कि बेलन फिसलने से पहले उलट जायगा यदि बेलन के आधार के व्यास की उसकी ऊँचाई से निष्पत्ति घर्षण-गुणक से कम हो।

मान लो धरातल का क्षैतिज से झुकाव ϕ है जब बेलन गिरने की सीमा पर है। अतः बेलन के गुरुत्व-केन्द्र G से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा ठीक आधार के भीतर होकर जायगी।



अतः यदि AB आधार है, तो रेखा GA ऊर्ध्वाधर होगी।

मान लो C आधार का मध्य-बिन्दु r बेलन की त्रिज्या और h बेलन की ऊँचाई है।

$$\therefore \text{स्पज्या } \phi = \text{कोस्पज्या } CAG = \frac{AC}{CG} = \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \frac{2r}{h} \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

धरातल का क्षैतिज से झुकाव θ, जब बेलन फिसलने की सीमा पर है,

$$\text{स्पज्या } \theta = \mu \quad \ldots \quad \ldots \quad (२)$$

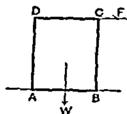
से दिया जाता है।

अतः बेलन फिसलने से पहले उलट जायगा यदि $\phi < \theta$, अर्थात् यदि

$$\frac{2r}{h} < \mu$$

उदाहरण २। एक आयत $ABCD$, जिसका आधार AB एक रूक्ष मेज पर है, ऊर्ध्वाधर धरातल पर रखा हुआ है। एक धीरे धीरे बढ़ता हुआ बल DC पर कार्य करता है। बताओ यह समतुलन फिसलने से नष्ट होगा अथवा उलटने से।

मान लो F बल है और W आयत का भार है।



मान लो $AB=2a$ और $BC=h$.

यदि आयत उलटता है तो स्पष्ट है कि वह B के बल उलटेगा और यह तब होगा जब F और W के घूर्ण B पर समतुलित हो,

अर्थात् जब $F.h = W.a$ ...... (१).

आयत फिसलेगा जब F सीमान्त घर्षण के बराबर हो, अर्थात् जब

$$F=\mu W \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

∴ आयत उलटे अथवा फिसलेगा जब (१) से प्राप्त किया गया F का मान (२) से प्राप्त किये गये F के मान से कम अथवा अधिक हो, अर्थात् जब

$$\frac{a}{h} \lessgtr \mu,$$

अर्थात् जब $\mu \gtrless$ आधार और दुगनी ऊँचाई की निष्पत्ति से ।

उदाहरणमाला ३४

१। एक बेलन अपने वृत्तीय आधार के बल एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है। घर्षण-गुणक $\frac{1}{3}$ है। धरातल का झुकाव तथा बेलन की ऊँचाई और आधार के व्यास का सम्बन्ध उस अवस्था में मालूम करो जब बेलन फिसलने और साथ ही गिरने की भी सीमा पर हो।

२। एक ठोस बेलन रूक्ष क्षैतिज धरातल पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका एक चपटा सिरा धरातल पर है, और उस पर एक क्षैतिज बल उसके ऊपर के सिरे के केन्द्र में होकर लगाया गया है। यदि यह बल बेलन के खसकाने के लिये ठीक पर्याप्त हो, तो सिद्ध करो कि यदि घर्षण-गुणक उस निष्पत्ति से कम हो जो बेलन की त्रिज्या को ऊँचाई के साथ है, तो वह फिसलेगा परन्तु उलटेगा नहीं।

३। एक समत्रिबाहु त्रिभुज, जिसका आधार एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है, समतुलित अवस्था में है। एक धीरे धीरे बढ़ता हुआ क्षैतिज बल त्रिभुज के धरातल में उसके शीर्ष पर लगाया गया है। सिद्ध करो कि त्रिभुज अपने आधार के सिरे पर लुढ़कने से पहले फिसलेगा यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ से कम हो।

४। एक शंक्वाकार शर्कराखंड, जिसकी ऊँचाई उसके आधार के व्यास से दुगनी है, एक मेज पर खड़ा है। मेज ठीक इतनी रूक्ष है कि वह फिसलने नहीं पाता। मेज का एक सिरा धीरे धीरे उठाया जाता है यहाँ तक

शर्करा-खंड गिरने की सीमा पर आ जाता है। इस अवस्था में मेज का क्षैतिज मे झुकाव मालूम करो।

५। एक शंकु, जिसका शीर्ष-कोण 2α है, एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है। यदि धरातल का झुकाव बढ़ाया जाय तो सिद्ध करो कि शंकु गिरने से पहले फिसलने लगेगा यदि घर्षण-गुणक 4 स्पज्याα से कम हो।

६। एक सम शंकु एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है। यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो शंकु का शीर्ष कोण मालूम करो जब वह फिसलने और साथ ही गिरने की सीमा पर भी हो।

७। एक शंकु एक रूक्ष मेज पर रखा हुआ है। शंकु के शीर्ष मे बँधी हुई एक डोरी एक चिकनी घिरनी पर से जाती हुई एक भार को सम्हाले हुये है। घिरनी की ऊँचाई शंकु के शिखर की ऊँचाई के बराबर है। सिद्ध करो कि यदि भार को धीरे धीरे बढाया जाय तो शंकु गिर जायगा अथवा फिसलेगा जब घर्षण-गुणक $>$ अथवा $<$ स्पज्या α जहाँ पर α शंकु का अर्द्ध-शीर्ष कोण है।

८। एक घनाकार कुन्दा एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है जिसके किनारे तख्ते के किनारों के समानान्तर हैं। जब तख्ता धीरे धीरे उठाया जाता है तो यदि कुन्दा फिसलने से पहले गिर जाय, तो बताओ घर्षण-गुणक का लघुतम मान क्या होगा ?

९। एक त्रिभुजीय पटल ABC, जो B पर समकोण है, BC के बल एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है। यदि धरातल को उसी धरातल में BC पर लम्ब एक अक्ष के चारों ओर धीरे धीरे इस प्रकार झुकायें कि कोण B, कोण C से नीचा हो जाय, तो सिद्ध करो कि पटल फिसलने अथवा गिरने लगेगा जब घर्षण-गुणक स्पज्या A से कम अथवा अधिक है।

१०। $ABCD$ एक वर्गाकार सम धातु की प्लेट है जो अपनी भुजा BC के बल एक बिल्कुल रूक्ष धरातल पर रखी हुई है जिसका क्षैतिज मे झुकाव α है। प्लेट के सबसे ऊँचे विन्दु A में बँधी हुई एक रस्सी

AP, धरातल के शिखर P पर लगी एक चिकनी घिरनी पर से जाती हुई एक भार w को सम्हालती है, और AP क्षैतिज है। यदि प्लेट का भार W है, तो सिद्ध करो कि ज्यों ज्यों w बढ़ता है तो प्लेट घूमने लगेगी जब

$$w > W\frac{1 + \text{स्पज्या}\, a}{2}.$$

११। आयताकार समानान्तर षट्फलक के रूप का एक टन भार का एक कुन्दा 8 फुट ऊँचा है और उसका आधार 6 फुट भुजा का एक वर्ग है। वह एक रूक्ष भारहीन तख्ते पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसके आधार की भुजाये तख्ते की लम्बाई और चौड़ाई के समानान्तर है, और आधार का केन्द्र तख्ते के एक सिरे से 6 फुट दूर है। तख्ता अब इस सिरे पर तब तक उठाया जाता है जब तक कुन्दा बिना फिसले हुये गिर न जाय। बताओ कितना कर्म किया गया।

२०९—उदाहरण। एक सम दंड एक खोखले रूक्ष गोले के भीतर सीमान्त समतुलित अवस्था मे रखा हुआ है। यदि दंड गोले के केन्द्र पर $2a$ कोण बनाता हो, और यदि λ घर्षण-कोण हो, तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से दंड का झुकाव

$$\text{स्पज्या}^{-1}\left[\frac{\text{स्पज्या}(a+\lambda)-\text{स्पज्या}\,(a-\lambda)}{2}\right] \text{ होगा।}$$

मान लो AB दंड, C उसका गुरुत्व-केन्द्र और O गोले का केन्द्र है। इसलिये $\angle GOA = \angle GOB = a$.

A और B से AC और BC रेखायें A और B को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा से λ कोण बनाती हुई खींचो। धारा १८९ से यह क्रमशः A और B पर R और S परिणामी प्रतिबलों की दिशायें है।

क्योंकि ये प्रतिबल और भार दंड को समतुलित रखते हैं, इसलिये G से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा C से जायगी।

मान लो A से खींची गई क्षैतिज रेखा AD है जो CG को D पर मिलती है इसलिये कोण $GAD=\theta$.

$$\angle CAG=\angle OAG-\lambda=90°-\alpha-\lambda,$$

और
$$\angle CBG=\angle OBG+\lambda=90°-\alpha+\lambda.$$

अतः धारा ७९ के साध्य (२) से

$(a+a)$ कोस्पज्या $CGB=a$ कोस्पज्या $CAB-a$ कोस्पज्या CBA,

अर्थात् 2 स्पज्या $\theta=$ कोस्पज्या $(90°-\alpha-\lambda)-$ कोस्पज्या $(90°-\alpha+\lambda)$

$=$ स्पज्या $(\alpha+\lambda)-$ स्पज्या $(\alpha-\lambda)$ .. ... (१).

वैकल्पिक विधि : धारा ८३ के नियमों का प्रयोग करके भी यह फल निकाला जा सकता है।

बलों को दंड पर विश्लिष्ट किया, तो

R कोज्या $(90°-\alpha-\lambda)-S$ कोज्या $(90°-\alpha+\lambda)=W$ ज्या θ,

अर्थात् R ज्या $(\alpha+\lambda)-S$ ज्या $(\alpha-\lambda)=W$ ज्या θ .. .. (२).

दंड की लम्ब दिशा में विश्लिष्ट किया, तो

R कोज्या $(\alpha+\lambda)+S$ कोज्या $(\alpha-\lambda)=W$ कोज्या θ ... (३).

A पर घूर्ण लिया, तो

$S.AB$ ज्या $(90°-\alpha+\lambda)=W.AG$ कोज्या θ,

अर्थात् $2S$ कोज्या $(\alpha-\lambda)=W$ कोज्या θ ... ... (४).

समीकरण (३) और (४) से,

R कोज्या $(\alpha+\lambda)=S$ कोज्या $(\alpha-\lambda)=\frac{1}{2}W$ कोज्या θ.

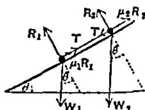
R और S के इन मानों को (२) में रख दिया, तो

स्पज्या $(\alpha+\lambda)-$ स्पज्या $(\alpha-\lambda)=2$ स्पज्या θ.

सांख्यिक उदाहरण। यदि दंड गोले के केन्द्र पर एक समकोण बनाता है, तो सिद्ध करो कि क्षैतिज से उसका झुकाव घर्षण-कोण का दुगना होगा।

२१० उदाहरण । दो पिंड, जिनके भार W_1 और W_2 हैं, एक आनत धरातल पर रखे हुये हैं। यह एक डोरी से बंधे हुये हैं जिसकी दिशा धरातल की महत्तम ढाल-रेखा पर पड़ती है। यदि पिंडों और धरातल के बीच के घर्षण-गुणक क्रम से μ_1 और μ_2, हैं, तो यह मान कर कि अधिक चिकना पिंड दूसरे से नीचे है धरातल के क्षैतिज से झुकाव मालूम करो जब दोनों पिंड फिसलने की सीमा पर हों।

नीचे का पिंड उस अवस्था में फिसलेगा जब उसका झुकाव स्पज्या$^{-1}\mu_1$ है, परन्तु ऊपर का पिंड उस समय तक नहीं फिसलेगा जब तक कि झुकाव स्पज्या$^{-1}\mu_2$ न हो। चूंकि दोनों पिंड एक दूसरे से बँधे हुये हैं, अतः फिसलने के लिये झुकाव इन दोनों मानों के बीच में होगा। मान लो वह मान θ है, और मान लो



R_1 और R_2 पिंडों के अभिलम्ब प्रतिबल हैं और T डोरी का तनाव हैं।

दोनों घर्षण $\mu_1 R_1$ और $\mu_2 R_2$ धरातल पर ऊपर की ओर कार्य करते हैं।

W_1 के समतुलन के लिये

$$W_1 \text{ ज्या } \theta = T + \mu_1 R_1,$$

और $$W_1 \text{ कोज्या } \theta = R_1.$$

$$\therefore \; T = W_1 (\text{ज्या } \theta - \mu_1 \text{ कोज्या } \theta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (१).$$

W_2 के समतुलन के लिये

$$W_2 \text{ ज्या } \theta + T = \mu_2 R_2,$$

और $$W_2 \text{ कोज्या } \theta = R_2.$$

$$\therefore \; T = \mu_2 R_2 - W_2 \text{ ज्या } \theta = W_2 (\mu_2 \text{ कोज्या } \theta - \text{ज्या } \theta) \quad \ldots \quad (२).$$

अतः (१) और (२) से,

$$W_1 (\text{ज्या } \theta - \mu_1 \text{ कोज्या } \theta) = W_2 \; (\mu_2 \text{ कोज्या } \theta - \text{ज्या } \theta).$$

$\therefore\ (W_1+W_2)$ ज्या $\theta=(W_1\mu_1+W_2\mu_2)$ कोज्या θ.

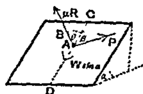
$$\therefore\ \text{स्पज्या}\ \theta=\frac{W_1\mu_1+W_2\mu_2}{W_1+W_2}.$$

उदाहरण १। दो बराबर पिंड एक रूक्ष आनत धरातल पर एक हल्की डोरी से बंधे हुये रखे हैं। यदि घर्षण-गुणक क्रम से $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं, तो सिद्ध करो कि दोनों फिसलने की अवस्था मे तब होंगे जब धरातल का झुकाव स्पज्या$^{-1}\frac{5}{12}$ है।

उदाहरण २। सिद्ध करो कि वह बडे से बडा कोण जो धरातल क्षैतिज से बन सकता है यदि तीन बराबर पिंड, जिनके घर्षण-गुणक क्रम से $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, और $\frac{3}{4}$ हैं और जो एक दूसरे से सम्बद्ध हैं, बिना फिसले समतुलित अवस्था में धरातल पर रखे हो, स्पज्या$^{-1}\frac{2}{3}$ होगा।

२११—उदाहरण। एक कण एक रूक्ष धरातल पर रखा हुआ है जिसका क्षैतिज से झुकाव a है। कण पर एक बल P लगाया गया है जो धरातल के समानान्तर और महत्तम ढाल की रेखा से β कोण बनाता है। यदि घर्षण-गुणक μ है और समतुलन सीमान्त है, तो बताओ कण किस दिशा में फिसलेगा।

मान लो W कण का भार और R अभिलम्ब प्रति बल है।



आनत धरातल के लम्ब दिशा में बलों का परिणामी शून्य होना चाहिये।

$\therefore\ R=W$ कोज्या a .. (१).

भार का दूसरा अवयव बल W ज्या a है जो महत्तमढाल-रेखा पर नीचे की ओर कार्य करता है।

मान लो μR, घर्षण AB दिशा में महत्तमढाल-रेखा से कोण θ बनाता हुआ कार्य करता है, इसलिये कण बढ़ाई हुई BA की दिशा में फिसलना आरम्भ करेगा।

क्योंकि धरातल के पृष्ठ पर कार्य करते हुये बल समतुलित अवस्था में हैं, इसलिये लामी के प्रमेय से,

$$\frac{\mu R}{\text{ज्या}\,\beta} = \frac{W\ \text{ज्या}\,\alpha}{\text{ज्या}\,(\theta+\beta)} = \frac{P}{\text{ज्या}\,\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad (२).$$

(१) और (२) में से R और W का विलोपन करके,

$$\text{कोज्या}\,\alpha = \frac{R}{W} = \frac{\text{ज्या}\,\alpha\ \text{ज्या}\,\beta}{\mu\ \text{ज्या}\,(\theta+\beta)}.$$

अतः $$\text{ज्या}\,(\theta+\beta) = \frac{\text{स्पज्या}\,\alpha\ \text{ज्या}\,\beta}{\mu} \quad \ldots \quad (३),$$

जिससे θ कोण निकल आयेगा ।

सांख्यिक उदाहरण । मान लो धरातल का झुकाव 30°, घर्षण गुणक $\frac{1}{3}$ है और बल P और महत्तमढाल-रेखा के बीच का कोण 30° है, तो

$$\text{ज्या}\,(\theta+30°) = \frac{\text{स्पज्या}\,30°.\,\text{ज्या}\,30°}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{ज्या}\,60° \ldots (४).$$

अतः $\theta = 30°$, और पिंड धरातल पर महत्तमढाल-रेखा से 30° का कोण बनाता हुआ फिसलना आरम्भ करेगा ।

बल P का मान आसानी से $\frac{W}{6}\sqrt{3}$ दिखलाया जा सकता है ।

यदि बल भार को पराजित करने की सीमा पर हो, तो यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है [अथवा (४) से, क्योंकि, θ का मान 90° है] कि घर्षण μR क्षैतिज दिशा में कार्य करता है, इसलिये कण क्षैतिज दिशा में फिसलना आरम्भ करेगा और P का संगत मान $\frac{W}{3}\sqrt{3}$ होगा ।

उदाहरणमाला ३५

१ । एक सीढ़ी का एक सिरा b लम्बाई के दो भागों में विभाजित करता है । एक रूक्ष क्षैतिज फर्श पर और दूसरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर रखा है । सीढ़ी का गुरुत्व केन्द्र उसे a और यदि फर्श और दीवार

पर घर्षण-गुणक क्रमसे μ और μ' हैं, तो सिद्ध करो कि सीमान्त समतुलित अवस्था में सीढी का क्षैतिज से झुकाव

$$\text{स्पज्या}^{-1}\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)} \text{ है ।}$$

२। एक बिना भार का दंड क्षैतिज अवस्था में दो रूक्ष आनत धरातलों के बीच जो एक दूसरे से समकोण बनाते हैं रखा हुआ है। घर्षण कोण λ प्रत्येक धरातल के झुकाव से कम है। सिद्ध करो कि दंड के उस भाग की लम्बाई, जिस पर एक भार इस प्रकार रखा जा सके कि दंड फिसलने न पाये, दंड की कुल लम्बाई की ज्या $2a$. ज्या 2λ हैं, जहाँ क्षैतिज से प्रत्येक धरातल का झुकाव a है।

३। एक भारी समदंड दो क्षैतिज खूंटियों में से एक के ऊपर और दूसरी के नीचे एक ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है, सिद्ध करो कि उस सबसे छोटे दंड की लम्बाई जो इस अवस्था में रखा जा सकता है, a(1+स्पज्या a कोस्पज्या λ) होगी, जहाँ खूंटियों के बीच की दूरी a, उनको मिलाने वाली रेखा का क्षैतिज से झुकाव a और घर्षण-कोण λ हैं।

४। एक भारी सम दंड, जिसकी लम्बाई एक फुट है और जिसका एक सिरा रूक्ष और दूसरा चिकना है, एक वृत्ताकार छल्ले के भीतर ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है। छल्ले की त्रिज्या 10 इंच है। यदि दंड सीमान्त समतुलित अवस्था में है जब उसका रूक्ष सिरा छल्ले के सबसे नीचे बिन्दु पर है, तो सिद्ध करो कि घर्षण-गुणक $\frac{24}{3}$ है।

५। एक भारी सम दंड अपने सिरो पर ऊर्ध्वाधर धरातल में नियत एक रूक्ष वृत्ताकार छल्ले के भीतर रखा हुआ है। दंड छल्ले के केन्द्र पर 120° का कोण बनाता है, और सीमान्त समतुलित अवस्था में क्षैतिज से कोण θ बनाता है। यदि $\sqrt{3}\mu$ = स्पज्या a, जहाँ μ घर्षण-गुणक है, तो सिद्ध करो कि स्पज्या θ : स्पज्या $2a$ :: $2:\sqrt{3}$.

६। A और B दो छोटे भारी बराबर छल्ले हैं जो एक रूक्ष क्षैतिज छड़ पर सरकते हैं। घर्षण-गुणक $3^{-\frac{1}{2}}$ है। एक और भारी छल्ला

C, A और B से बँधी हुई बिना भार की चिकनी डोरी पर सरकता है, तो सिद्ध करो कि सीमान्त समतुलित अवस्था में ABC एक समत्रिबाहु त्रिभुज होगा।

७। एक भारी सम दंड AB का एक सिरा एक क्षैतिज दंड AC पर, जिसमे वह एक छल्ले से लगा हुआ है, सरक सकता है। B और C से एक डोरी बँधी हुई है। जब दड सरकने की सीमा पर है, ABC एक समकोण है, μ घर्षण-गुणक है, और AB और ऊर्ध्वाधर के बीच का कोण α है, तो सिद्ध करो कि

$$\mu = \frac{\text{स्पज्या } \alpha}{\text{स्पज्या}^2 \alpha + 2}.$$

८। एक सम दड के सिरे दो नियत बराबर रूक्ष दंडों पर सरकते है, जिनमें एक ऊर्ध्वाधर है और दूसरा क्षैतिज से α कोण बनाता है। सिद्ध करो कि सरकने वाले दंड का क्षैतिज से झुकाव, जब वह सरकने की सीमा पर हो, समीकरण

$$\text{स्पज्या } \theta = \frac{1 \mp 2\mu \text{ स्पज्या } \alpha - \mu^2}{2(\text{स्पज्या}\alpha \pm \mu)}$$

से दिया जाता है।

९। एक सम सीढी, जिसकी लम्बाई a और भार W है, क्षैतिज से θ कोण बनाती है, उसका एक सिरा ऊर्ध्वाधर दीवार पर और दूसरा क्षैतिज फ़र्श पर रखा हुआ है। दीवार और फ़र्श दोनों बराबर रूक्ष है, घर्षण-गुणक स्पज्या λ है। सिद्ध करो कि एक आदमी, जिसका भार P है, सीढी के चोटी के

$$\frac{W \text{ कोस्पज्या } 2\lambda + P \text{ कोस्पज्या } \lambda - (W+P) \text{ स्पज्या } \theta}{2P} a \text{ ज्या } 2\lambda$$

से अधिक निकट नहीं जा सकता।

१०। टेनिस के जाल को सम्हालने वाले डंडे रस्सियों से ऊर्ध्वाधर अवस्था में स्थिर खड़े किये गये है, जिनमें से एक एक रस्सी प्रत्येक डंडे से बँधी हुई है और जो डंडों से 2 फुट की दूरी पर खूँटियों के चारों ओर होकर जाती

है। यदि रस्सी और खूंटियों के बीच में सीमान्त घर्षण-गुणक $\frac{1}{3}$ है, तो सिद्ध करो कि खूंटियों का ऊर्ध्वाधर से झुकाव स्पज्या $^{-1}\frac{2}{11}$ से कम नहीं होना चाहिये, जहां डंडों की ऊँचाई 4 फुट है।

११। एक आयताकार समानान्तर-षट्फलक के आकार का सन्दूक जिसका बिना ढकने का भार 200 पौं० है, और जिसकी चौड़ाई पीछे से सामने तक एक फुट है, और ढकने का भार 50 पौं० है, एक चिकनी दीवार के समानान्तर अपनी पीठ से 6 इंच की दूरी पर खड़ा हुआ है। यदि उसका ढकना खुला हुआ है और दीवार के सहारे रखा हुआ है, तो समतुलित अवस्था में सन्दूक और भूमि के बीच का लघुतम घर्षण-गुणक मालूम करो।

१२। एक भारी वृत्ताकार मंडल, जिसकाधरातल ऊर्ध्वाधर है एक रूक्ष आनत तल पर समतुलित अवस्था में एक डोरी से जो आनत धरातल के समानान्तर है, और जो वृत्त को स्पर्श करती है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि, यदि धरातल का झुकाव i है और घर्षण-गुणक $\frac{1}{2}$ स्पज्या i से कम है तो मंडल धरातल पर फिसल जायगा।

१३। एक रूक्ष मेज पर, जिसका घर्षण-गुणक μ है, रखा हुआ एक कण एक डोरी से, जिसकी लम्बाई a है, मेज पर एक नियत विन्दु A से बँधा हुआ है। कण से एक दूसरी डोरी बँधी हुई है, जो मेज के चिकने किनारे पर से जाती हुई एक अन्य स्वतन्त्रतापूर्वक लटके हुये बराबर कण को सम्हालती है। सिद्ध करो कि मेज पर रखा हुआ कण उस वृत्त के किसी विन्दु P पर होगा, जिसका केन्द्र A और त्रिज्या a है, और जो इस प्रकार का है कि डोरी AP तनी रहती है और दूसरी डोरी की A से दूरी μa से अधिक नहीं रहती है।

१४। एक भारी दंड, जिसकी लम्बाई $2a$ है, एक रूक्ष खूंटी पर रखा हुआ है और उसका एक सिरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर है। यदि दीवार से खूंटी की दूरी c है और खूंटी और दीवार

दोनों के घर्षण-कोण λ है, तो सिद्ध करो कि जब दंड का दीवार से स्पर्श-विन्दु खूंटी के ऊपर है यदि दंड और दीवार के बीच का कोण θ है, तो दड नीचे फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^3\,\theta=\frac{c}{a}\text{कोज्या}^2\lambda\ ;$$

यदि दंड का दीवार से स्पर्श-विन्दु खूंटी के नीचे है, तो सिद्ध करो कि दड नीचे फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^2\theta\,\text{ज्या}(\theta+2\lambda)=\frac{c}{a}\text{कोज्या}^2\,\lambda,$$

और ऊपर को फिसलने को होगा जब

$$\text{ज्या}^2\theta\,\text{ज्या}\ (\theta-2\ \lambda)=\frac{c}{a}\text{कोज्या}^2\,\lambda.$$

१५। एक वृत्ताकार मंडल, जिसकी त्रिज्या a है और भार W है, एक चिकने गोले के भीतर रखा हुआ है, जिसकी त्रिज्या b है। एक कण जिसका भार w है मंडल पर रखा हुआ है। यदि कण और मंडल के बीच का घर्षण-गुणक μ है, तो मंडल के केन्द्र से वह बड़ी से बड़ी दूरी मालूम करो जहाँ कण ठहर सकता है

१६। एक चिकना गोला, जिसका भार W है, एक ऊर्ध्वाधर दीवार और समपार्श्व जिसका एक फलक एक क्षैतिज धरातल पर है, के बीच में रक्खा हुआ है। यदि क्षैतिज धरातल और समपार्श्व के बीच का घर्षण-गुणक μ है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था को ध्यान में रखते हुये, समपार्श्व का लघुतम भार $W\left(\frac{\text{स्पज्या}\ a}{\mu}-1\right)$ हो सकता है, जहाँ a उस फलक का क्षैतिज से झुकाव है जो गोले को स्पर्श करती है।

१७। दो बराबर दंड, जिनकी लम्बाई $2a$ है, इस प्रकार बँधे हुये हैं कि वे एक वर्ग की दो भुजायें बनाते हैं और उनमें

से एक एक रूक्ष खूँटी पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि दंड के मध्य-बिन्दु से स्पर्श-बिन्दुओं की सीमान्त दूरियाँ $\frac{a}{2}(1 \pm \mu)$ हैं, जहाँ μ घर्षण-गुणक है।

१८। AC और BC दो सम दंड C पर इस प्रकार सम्बद्ध हैं कि वे एक टेढ़ा सम दंड बन जाते हैं जिसके दोनों भाग एक दूसरे पर लम्ब हैं। यह टेढ़ा दंड एक रूक्ष मेज के सिरे पर, जो AC को उसके मध्य-बिन्दु पर स्पर्श करती है, रुका हुआ है। यदि BC की लम्बाई AC से तिगुनी है, तो सिद्ध करो कि AC के क्षैतिज से झुकाव की स्पर्शज्या $\frac{1}{3}$ है।

दंड के घर्षण-गुणक का उस दशा में लघुतम मान मालूम करो जब दंड A बिन्दु मेज के किनारे पर रख कर समतुलित अवस्था में रह सके।

१९। एक भारी रस्सी दो दिये हुये एक ही पदार्थ के बने हुये आनत धरातलों पर उनके उभयनिष्ठ शीर्ष लगी हुई किसी घिरनी पर जाती हुई रखी है। यदि रस्सी फिसलने की सीमा पर है तो सिद्ध करो कि उसके दोनों सिरों को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज से घर्षण-कोण के बराबर कोण बनाती है।

२०। एक रूक्ष आनत धरातल पर ($\mu = \frac{1}{2}$) एक भार W बल $\frac{W}{2}$ द्वारा रुका हुआ है जो धरातल के समानान्तर ऊपर की ओर लगाया गया है। उस लघुतम अधिक बल का परिमाण और दिशा मालूम करो जो धरातल पर कार्य करता हुआ भार को फिसलने से रोकता है जब बल $\frac{W}{2}$ धरातल पर उसकी महत्तम ढाल-रेखा से 60° का कोण बनाता हुआ लगाया जाता है।

२१। एक भार W एक रूक्ष धरातल पर $\left(\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, रखा हुआ है। धरातल का क्षैतिज से झुकाव 45° है। वह धरातल के शिखर पर लगे एक चिकने छल्ले से जाती हुई डोरी से बँधा हुआ है, जिसके दूसरे सिरे पर एक भार P ऊर्ध्वाधर लटक रहा है। यदि $W = 3P$, और θ डोरी AW और धरा-

तल की महत्तमढाल-रेखा के बीच का सबसे बड़ा कोण है, तो सिद्ध करो कि कोज्या $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

वह दिशा भी मालूम करो जिसमें W फिसलना आरम्भ करेगा।

२२। एक भार W एक रूक्ष आनत धरातल पर रखा हुआ है। धरातल का क्षैतिज से झुकाव α है, और घर्षण-गुणक 2 स्पज्या α है। सिद्ध करो कि धरातल पर लगा हुआ लघुतम क्षैतिज बल जो पिंड को खिसका सकता है $\sqrt{3}\, W$ज्या α है, और पिंड महत्तमढाल-रेखा से 60° का कोण बनाता हुआ फिसलना आरम्भ करेगा।

२३। यदि एक हल्के दृढ दंड से सम्बद्ध दो बराबर भार, जो बराबर रूक्ष नहीं हैं, एक आनत धरातल पर रखे जायँ, जिसका क्षैतिज से झुकाव α वह कोण है जिसकी स्पर्शज्या घर्षण-गुणकों का गुणोत्तर-मध्यमान है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड का महत्तमढाल-रेखा से अधिक से अधिक झुकाव

$$\text{कोज्या}^{-1}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2\sqrt{2\mu_1\mu_2}}\right)$$

होगा, जहाँ पर μ_1 और μ_2 घर्षण-गुणक है।

२४। एक भारी कण एक रूक्ष आनत धरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव α है, रखा हुआ है। वह एक बिना भार की AP डोरी से धरातल में एक नियत बिन्दु A से बँधा हुआ है। यदि, जब कण फिसलने की अवस्था में है, AB महत्तमढाल-रेखा और θ कोण PAB हो, तो सिद्ध करो कि ज्या $\theta = \mu$ कोस्पज्या α।

अपने परिमाण की व्याख्या करो जब μ कोस्पज्या α इकाई से बड़ा हो।

२५। एक अर्द्ध-गोलीय कवच एक रूक्ष धरातल पर रखा हुआ है। धरातल का घर्षण-कोण λ है। सिद्ध करो कि किनारे के समतल आधार का क्षैतिज से झुकाव ज्या$^{-1}$(2ज्या λ) से अधिक नहीं हो सकता।

२६। एक ठोस समाांगिक अर्द्धगोला एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर

एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। सिद्ध करो कि, यदि घर्षण-गुणक $\frac{3}{8}$ से अधिक है, तो अर्द्ध-गोला किसी भी अवस्था में समतुलित रह सकता है, और यदि यह गुरमक कम है तो वह लघुतम कोण जो अर्द्ध-गोले का आधार ऊर्ध्वाधर से बनाता है कोज्या$^{-1}$ $\frac{8\mu}{3}$ होगा।

यदि दीवार भी रूक्ष है (घर्षण-गुणक μ' हो) तो सिद्ध करो कि यह कोण

$$\text{कोज्या}^{-1}\left(\frac{8\mu}{3}\cdot\frac{1+\mu'}{1+\mu\mu'}\right) \text{ है।}$$

२७। एक भारी समांशिक अर्द्ध-गोला एक रूक्ष आनत धरातल पर, उन्नतोदर पृष्ठ धरातल को स्पर्श करता हुआ रखा है। सिद्ध करो कि क्षैतिज से धरातल का महत्तम झुकाव ज्या$^{-1}$ $\frac{3}{8}$ है।

सिद्ध करो कि कोई समांशिक गोला किसी आनत धरातल पर, चाहें वह कितना ही रूक्ष क्यों न हो, समतुलित नहीं रह सकता।

२८। एक अर्द्ध-गोला, जिसका उन्नतोदर पृष्ठ एक रूक्ष आनत धरातल को, जिसका क्षैतिज से झुकाव ज्या$^{-1}$ $\frac{3}{16}$ है, स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। उसके समतल आधार का ऊर्ध्वाधर से झुकाव मालूम करो।

२९। एक सम अर्द्ध-गोला जिसकी त्रिज्या a और भार W है, एक क्षैतिज धरातल पर उन्नतोदर पृष्ठ धरातल को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। एक रूक्ष कण, जिसका भार W' है, उसके समतल पर रखा है। सिद्ध करो कि कण की समतल के केन्द्र से दूरी $\frac{3W\mu a}{8W'}$ से अधिक नहीं हो सकती, हाँ μ घर्षण-गुणक है।

३०। एक गोला, जिसकी त्रिज्या a है और जिसका गुरुत्व-केन्द्र उसके केन्द्र से c दूर है, सीमान्त समतुलित अवस्था में एक रूक्ष आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव α है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि यदि उसे 2 कोज्या$^{-1}$ $\left(\frac{a \text{ ज्या } \alpha}{c}\right)$ कोण से घुमाया जाय तो भी वह सीमान्त समतुलित अवस्था में रहेगा।

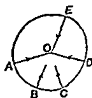
अध्याय १५

विविध

(Miscellaneous)

२१२—चिकने कब्जों द्वारा सम्बद्ध पिंड। जब दो पिंड एक दूसरे से कब्जे द्वारा जुड़े होते हैं, तो ऐसा प्रायः होता है कि या तो एक पिंड का गोलाकार सिरा दूसरे पिंड के बनाये हुये गड्ढे में ठीक बैठ जाता है जैसा कि गोल आधार-प्रकोष्ट (बाल एण्ड साकेट) जोड में होता है, अथवा एक गोल पिन अथवा कोई और अटकाने की वस्तु प्रत्येक पिंड के छेदों में होकर डाली जाती है जैसा दरवाजों के कब्जे में होता है।

दोनों स्थितियों में, यदि पिंड चिकने हो, तो प्रत्येक पिंड पर कब्जे की क्रिया केवल एकमात्र बल रहती है। मान लो चित्र दोनों पिंडों को सम्बद्ध करने वाले जोड़ के परिच्छेद को प्रदर्शित करता है। यदि जोड़ चिकना है तो जोड़ के सब बिन्दुओं पर क्रियायें पिन के केन्द्र से जाती है और इसलिये उन सब का



परिणामीबल O जाता हुआ एकमात्र बल होता है। एक पिंड पर कब्जे की क्रिया दूसरे पिंड पर कब्जे की क्रिया के बराबर और विपरीत होती है; क्योंकि इन क्रियाओं के बराबर और विपरीत बल पिन को उसका भार उपेक्षणीय होने के कारण समतुलित रखते हैं।

यदि जोड चिकना नही है, तो स्पर्श-बिन्दु $A, B, C, D,$...पर घर्षणीय प्रतिरोध भी होंगे जो OA, OB, OC,...के लम्ब कार्य करेंगे। ऐसे जोड़ पर कार्य करते हुये बल प्रायः एकमात्र बल में परिणत नही होते परन्तु एक बल और एक बलयुग्म के बराबर होते हैं (धारा ८७)।

चिकने कब्जों मे सम्बन्ध रखते हुये प्रश्नों के हल करने मे कब्जे पर क्रिया की दिशा और परिमाण दोनों ही प्राय. अज्ञात होते हैं। अतः किसी पिंड पर चिकने कब्जे की क्रिया को दो अज्ञात लम्ब अवयव बलों के बराबर मान लेने से अधिक सुविधा होती है ; इस दशा में दूसरे पिंड पर क्रिया इन अवयव बलों के बराबर और विपरीत होती हैं ।

क्योंकि प्रत्येक पिंड पर कार्य करते हुये बल और उसपर जोड की क्रियायें समतुलित होती हैं, इसलिये अब धारा ८३ के समतुलन के व्यापक नियमो का प्रयोग किया जा सकता है ।

प्रत्येक पिंड पर कार्य करती हुई प्रति-क्रियाओं के अवयव बलों के सम्बन्ध की त्रुटियों को दूर करने के लिये यह उचित है कि, जैसा अगले उदाहरण के दूसरे चित्र मे दिखलाया गया है, छड़ों को मिलाने के लिये बढ़ाया न जाय परन्तु उनके बीच में कुछ स्थान छोड दिया जाय ।

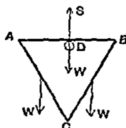
२१३ उदाहरण। तीन बराबर समदंड जिनमें से प्रत्येक का भार W है, एक समत्रिबाहु त्रिभुज बनाते हुये चिकने कब्जों द्वारा परस्पर जुडे हुये है। यदि समुदाय एक दंड के मध्य-बिन्दु से सम्हाल लिया जाय, तो सिद्ध करो कि सबसे नीचे के कोण पर क्रिया $\frac{\sqrt{3}}{6}W$ और दूसरे कोणों पर $W\sqrt{\frac{13}{12}}$ है।

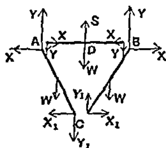
मान लो ABC दंडों से बना हुआ त्रिभुज है, और D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है जहाँ पर यह सम्हाला गया है ।

मान लो A पर दंड AB पर कब्जे की क्रिया दो अवयव बलों, क्रमसे Y और X के बराबर है जो ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में कार्य करते हैं ; अतः AC पर कब्जे की क्रिया इन अवयव बलों के बराबर और विपरीत होगी ।

क्योंकि पूरा मे समुदाय D खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखा पर सममित है, इसलिये B पर क्रिया भी Y और X अवयव बलों के बराबर होगी, जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है ।

मान लो CB पर कब्जे C की क्रिया, ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में Y_1 और दाईं ओर क्षैतिज दिशा में X_1 के बराबर है, तो CA पर उसी कब्जे की क्रिया इनके विपरीत दो अवयव बलों के बराबर होगी जैसा चित्र में दिखलाया गया है ।





AB के लिये ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लिष्ट किया, तो

$$S = W + 2Y \quad \ldots \quad \ldots \quad (१),$$

जहाँ पर S खूँटी D पर ऊर्ध्वाधर प्रतिबल है ।

CB के लिये, क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में विश्लिष्ट किया और C पर घूर्ण लिया, तो

$$X + X_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (२),$$

$$W = Y + Y_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (३),$$

और $W.a$ कोज्या $60^\circ + X.2a$ ज्या $60^\circ = Y.2a$ कोज्या 60°...(४).

CA के लिये, ऊर्ध्वाधर दिशा में विश्लिष्ट किया, तो

$$W = Y - Y_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (५).$$

समीकरण (३) और (५) से,

$Y_1 = 0$, और $Y = W$.

अतः समीकरण (४) से,

$$X = \tfrac{1}{2}W \text{ कोस्पज्या } 60^\circ = \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}W.$$

इसलिये (२) से, $X_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}W$.

और (१) से, $S = 3W$.

अतः B पर कब्जे की क्रिया बल $\sqrt{X^2+Y^2}$ (अर्थात् $W\sqrt{\frac{13}{12}}$) के बराबर है, जो क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}\frac{Y}{X}$ (अर्थात् स्पज्या$^{-1}$213) बनाती है, और C पर कब्जे की क्रिया $\frac{\sqrt{3}}{6}W$ के बराबर एक क्षैतिज बल है।

थोड़ा सा विचार करने से हमें मालूम हो जाता है कि C पर कब्जे की क्रिया क्षैतिज होनी चाहिये, क्योंकि पूरा समुदाय CD रेखा पर सममित है, और जबतक अवयव बल Y_1 शून्य न हो C पर प्रतिक्रिया सममित के नियम को सन्तुष्ट नही कर सकती।

उदाहरणमाला ३६

१। AB और BC दो बराबर सम छड़ें B पर स्वतन्त्रतापूर्वक जुड़ी हुई हैं। दीवार के एक बिन्दु पर एक कब्जे से A नियत है जिसके चारों ओर AB स्वतंत्रतापूर्वक ऊर्ध्वाधर धरातल में घूम सकती है। बताओ दोनों छड़ों को एक ही क्षैतिज रेखा में रखने के लिये BC के किस विन्दु पर एक ऊर्ध्वाधर बल लगाया जाय और उस बल का परिमाण क्या होगा?

२। AC और CB दो सम छड़ें, एक चिकने कब्जे द्वारा C पर जुड़ी हुई हैं, और उनके सिरे एक ही क्षैतिज रेखा में A और B दो बिन्दुओं से लगे हुये हैं। यदि छड़ें एक ही पदार्थ की बनी हो और उनका कुल भार 60 पौं० हों, और यदि प्रत्येक क्षैतिज से $60°$ का कोण बनाती हो तो सिद्ध करो कि विन्दु C पर कब्जे की क्रिया $5\sqrt{3}$ पौं० भार का एक क्षैतिज बल होगा।

३। एक परकार, जिसकी प्रत्येक भुजा W भार का एक सम दंड है, एक ही क्षैतिज रेखा में दो चिकनी खूंटियों पर इस प्रकार रुकी हुई है कि उसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दु खूंटियों पर है और कब्जा नीचे की ओर

हैं, और एक विना भार का दंड उसकी भुजाओं के सिरों को इस प्रकार मिलाता है कि भुजायें एक दूसरे से $2a$ कोण बनाती हुई अलग अलग रहती हैं। सिद्ध करो कि इस दंड पर दवाव और कब्जे पर क्रिया दोनों ही $\frac{1}{2}W$ कोस्पज्या के बराबर है।

४। AB और AC दो बराबर सम दंड, जिनमें से प्रत्येक का भार W है A पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़े हुये एक ऊर्ध्वाधर धरातल में हैं। उनके B और C सिरे एक चिकनी मेज पर टिके हुये हैं। एक डोरी जो C को AB के मध्य-विन्दु से मिलाती है उनको समतुलित अवस्था में रखे हुये है। यदि प्रत्येक दंड का क्षैतिज से झुकाव α है, तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव और A पर दंडों के प्रतिबल दोनो ही

$$\frac{W}{4} \text{ कोव्युज्या } \alpha \sqrt{1+8 \text{ कोज्या}^2 \alpha}$$

के बराबर हैं और प्रत्येक क्षैतिज से स्पज्या$^{-1}$ ($\frac{1}{3}$स्पज्या α) कोण बनाते हैं।

५। AC और BC दो बराबर छड़ें C पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ी हैं। इनके सिरे A और B एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर इस प्रकार रखे हैं कि ABC एक ऊर्ध्वाधर धरातल रहता। यदि घर्षण-गुणक $\frac{1}{2}$ है, तो सिद्ध करो कि कोण ABC एक समकोण से बड़ा नही हो सकता है और किसी भी समतुलित अवस्था में C पर दवाव मालूम करो।

६। AB, BC और CA तीन भारी समदंड जिनकी लम्बाई क्रम से 5, 4, और 3 फुट हैं, सिरों पर कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक त्रिभुज बनजाता है। सिद्ध करो कि वे AB के मध्य-विन्दु से A की ओर $1\frac{1}{5}$ इंच की दूरी पर एक आलम्ब पर AB को क्षैतिज रखते हुये समतुलित होंगे।

यह भी सिद्ध करो कि जब दंड समतुलित अवस्था में हैं A और B कब्जों पर क्रियाओं के ऊर्ध्वाधर अवयव बल क्रमसे $\frac{187}{600}W$ और $\frac{163}{600}W$ हैं, जहाँ पर दंडों का कुल भार W है।

७। AB और BC दो बराबर दंड B पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं और उनके मध्य-बिन्दुओं से एक इतनी लम्बी डोरी बँधी हुई हैं कि जब वह तनी रहती है तो कोण ABC एक समकोण होता है। यदि समुदाय A बिन्दु से स्वतंत्रतापूर्वक लटका हुआ है, तो सिद्ध करो ऊर्ध्वाधर से AB का झुकाव स्पज्या$^{-1}$ $\frac{1}{3}$ है, और डोरी का तनाव और कब्जे पर क्रिया भी मालूम करो।

८। AB और BC दो एक फुट लम्बे दंड है, जिनमें से प्रत्येक का भार W है। वे B पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं और एक नियत खूँटी O से तीन एक फुट लम्बी डोरियों OA, OB और OC द्वारा लटके हुये हैं। तीनों डोरियों के तनाव और कब्जे पर क्रिया का परिमाण मालूम करो जब सब डोरियाँ और दंड एक ही धरातल में है।

९। AB, BC और CD तीन सम छड़ें, जिनकी मोटाई बराबर है और जिसकी लम्बाई क्रम से l, $2l$, और l हैं, B और C पर चिकने कब्जों द्वारा जुड़ी हुई हैं, और एक पूर्ण चिकने गोले पर जिसकी त्रिज्या $2l$ है, इस प्रकार रखी हुई हैं कि BC का मध्य-बिन्दु और A और D सिरे गोले को स्पर्श करते हैं। सिद्ध करो BC के मध्य-बिन्दु पर दबाव छड़ों के भार का $\frac{91}{100}$ है।

१०। AB, BC, और CD तीन सम दंड, जिनके भार उनकी लम्बाइयों a, b, और c के समानुपाती है, B और C पर कब्जों द्वारा जुड़े हुये हैं और P और Q दो खूँटियों पर रखे हुये क्षैतिज अवस्था में हैं। B और C जोड़ों पर क्रियायें मालूम करो, और सिद्ध करो कि खूँटियों के बीच की दूरी

$$\frac{a^2}{2a+b}+\frac{c^2}{2c+b}+b$$

होनी चाहिये।

११। AB और AC दो समान सम दंड, जिनकी लम्बाई a है, A पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं। एक बिना भार का दंड BD, जिसकी लम्बाई

b है, B पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़ा हुआ है और D पर एक चि छल्ले में, जो AC पर सरकता है, बँधा हुआ है। पूरा समुदाय A एक छोटी चिकनी पिन पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि दंड ऊर्ध्वाधर से कोण

$$\text{स्पज्या}^{-1}\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$$

बनाता है।

१२। चार बराबर सम छड़ों से, जो एक दूसरे से कब्जों द्वारा ज़ु हुये हैं, एक वर्गाकार चित्र $ABCD$ बनता है जो जोड़ A से लटका हु है। A और C को मिलाती हुई एक डोरी इन्हें वर्ग के आकार रखे हुये है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव चारों दंडो के भार क आधा है। B अथवा D जोड़ पर क्रियाओं की दिशायें और परिमा मालूम करो।

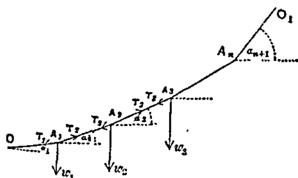
१३। चार बराबर दंड कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक सम-चतुर्भुज बनता है। आमने सामने के जोड़ों को डोरिया सम-चतुर्भुज के विकर्ण बनाती हुई मिलाती हैं। पूरा समुदाय एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव लम्बाइयों में एक ही निष्पत्ति है।

२१४—संयोग बहुभुज। यदि किसी हल्की डोरी के सिरे दो नियत बिन्दुओं से बँधे हों और यदि डोरी के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर भार लगे हों, तो डोरी से बने हुये चित्र को संयोग बहुभुज कहते हैं।

मान लो O और O_1 दो नियत बिन्दु हैं जिन पर डोरी के सिरे बँधे हुये हैं, और मान लो डोरी पर $A_1, A_2, .. A_n$ वे बिन्दु है जिन पर क्रमशः $w_1, w_2, ... w_n$ भारों के पिंड बँधे हुये हैं।

मान लो $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, .., A_nO_1$ भागों की लम्बाइ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ है, और मान लो क्षैतिज से उन α_{n+1} है।

मान लो बिन्दु O और O_1 के बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रम से h और k हैं, इसलिये



a_1 कोज्या $\alpha_1 + a_2$ कोज्या $\alpha_2 + \ldots + a_{n+1}$ कोज्या $\alpha_{n+1} = h$ ... (१),

और a_1 ज्या $\alpha_1 + a_2$ ज्या $\alpha_2 + \ldots + a_{n+1}$ ज्या $\alpha_{n+1} = k$ ... (२).

मान लो डोरी के भागों के तनाव क्रमसे $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ हैं।

भिन्न भिन्न भारों की समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में उत्तरोत्तर विश्लिष्ट करने पर

T_2 ज्या $\alpha_2 - T_1$ ज्या $\alpha_1 = w_1$, और T_2 कोज्या $\alpha_2 - T_1$ कोज्या $\alpha_1 = 0$;

T_3 ज्या $\alpha_3 - T_2$ ज्या $\alpha_2 = w_2$, और T_3 कोज्या $\alpha_3 - T_2$ कोज्या $\alpha_2 = 0$;

T_4 ज्या $\alpha_4 - T_3$ ज्या $\alpha_3 = w_3$, और T_4 कोज्या $\alpha_4 - T_3$ कोज्या $\alpha_3 = 0$;

... ...

T_{n+1} ज्या $\alpha_{n+1} - T_n$ ज्या $\alpha_n = w_n$,

और

T_{n+1} कोज्या $\alpha_{n+1} - T_n$ कोज्या $\alpha_n = 0$.

यह $2n$ समीकरण और समीकरण (१) और (२) मिल कर $(n+1)$ अज्ञात तनावों और $(n+1)$ अज्ञात झुकावों के निकालने के लिये पर्याप्त हैं।

समीकरणों के दायें पक्षों से,

T_1 कोज्या $\alpha_1 = T_2$ कोज्या $\alpha_2 = T_3$ कोज्या $\alpha_3 = \ldots = T_{n+1}$ कोज्या α_{n+1}

$= K$ (मान लो) ... (३).

b है, B पर चिकने कब्जे द्वारा जुड़ा हुआ है और D पर एक चिकने छल्ले से, जो AC पर सरकता है, बँधा हुआ है। पूरा समुदाय A से एक छोटी चिकनी पिन पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि दंड AC ऊर्ध्वाधर से कोण

$$\text{स्पर्शज्या}^{-1}\frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$$

बनाता है।

१२। चार बराबर सम छड़ों से, जो एक दूसरे से कब्जों द्वारा जुड़े हुये हैं, एक वर्गाकार चित्र $ABCD$ बनता है जो जोड़ A से लटका हुआ है। A और C को मिलाती हुई एक डोरी इन्हें वर्ग के आकार में रखे हुये है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव चारों दंडों के भार का आधा है। B अथवा D जोड़ पर क्रियाओं की दिशायें और परिमाण मालूम करो।

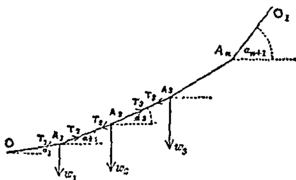
१३। चार बराबर दंड कब्जों द्वारा इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि उनसे एक सम-चतुर्भुज बनता है। आमने सामने के जोड़ों को डोरियाँ सम-चतुर्भुज के विकर्ण बनाती हुई मिलाती हैं। पूरा समुदाय एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। सिद्ध करो कि डोरियों के तनाव लम्बाइयों में एक ही निष्पत्ति है।

२१४—संयोग बहुभुज। यदि किसी हल्की डोरी के सिरे दो नियत बिन्दुओं से बँधे हों और यदि डोरी के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर भार लगे हों, तो डोरी से बने हुये चित्र को संयोग बहुभुज कहते हैं।

मान लो O और O_1 दो नियत बिन्दु हैं जिन पर डोरी के सिरे बँधे हुये हैं, और मान लो डोरी पर $A_1, A_2, .. A_n$ वे बिन्दु हैं जिन पर क्रमशः $w_1, w_2, .. w_n$ भारों के पिंड बँधे हुये हैं।

मान लो $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nO_1$ भागों की लम्बाइयाँ क्रम से $a_1, a_2, a_3, .., a_{n+1}$ हैं, और मान लो क्षैतिज से उनके झुकाव $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ हैं।

मान लो बिन्दु O और O_1 के बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियां क्रम से h और k हैं, इसलिये



a_1 कोज्या $\alpha_1 + a_2$ कोज्या $\alpha_2 + \cdots + a_{n+1}$ कोज्या $\alpha_{n+1} = h$ ... (१),

और a_1 ज्या $\alpha_1 + a_2$ ज्या $\alpha_2 + \cdots + a_{n+1}$ ज्या $\alpha_{n+1} = k$ ... (२).

मान लो डोरी के भागों के तनाव क्रमसे $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ हैं।

भिन्न भिन्न भारों की समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशाओं में उत्तरोत्तर विश्लिष्ट करने पर

T_2 ज्या $\alpha_2 - T_1$ ज्या $\alpha_1 = w_1$, और T_2 कोज्या $\alpha_2 - T_1$ कोज्या $\alpha_1 = 0$;

T_3 ज्या $\alpha_3 - T_2$ ज्या $\alpha_2 = w_2$, और T_3 कोज्या $\alpha_3 - T_2$ कोज्या $\alpha_2 = 0$;

T_4 ज्या $\alpha_4 - T_3$ ज्या $\alpha_3 = w_3$, और T_4 कोज्या $\alpha_4 - T_3$ कोज्या $\alpha_3 = 0$;

... ...

T_{n+1} ज्या $\alpha_{n+1} - T_n$ ज्या $\alpha_n = w_n$,

और T_{n+1} कोज्या $\alpha_{n+1} - T_n$ कोज्या $\alpha_n = 0$.

यह $2n$ समीकरण और समीकरण (१) और (२) मिल कर $(n+1)$ अज्ञात तनावों और $(n+1)$ अज्ञात झुकावों के निकालने के लिये पर्याप्त हैं।

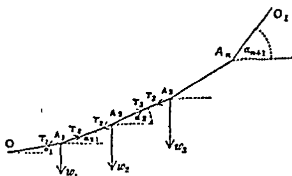
समीकरणों के दायें पक्षों से,

T_1 कोज्या $\alpha_1 = T_2$ कोज्या $\alpha_2 = T_3$ कोज्या $\alpha_3 = \ldots = T_{n+1}$ कोज्या α_{n+1}

$= K$ (मान लो) ... (३).

अतः डोरी के तनाव का क्षैतिज अवयव स्थिर रहता है और यह K से सूचित किया जाता है।

समीकरण के बायें पक्षों में (३) से निकाले गये $T_1, T_2, ..., T_{n+1}$ मान रखने पर



$$\text{स्पज्या } a_2 - \text{स्पज्या } a_1 = \frac{w_1}{K},$$

$$\text{स्पज्या } a_3 - \text{स्पज्या } a_2 = \frac{w_2}{K},$$

$$\text{स्पज्या } a_4 - \text{स्पज्या } a_3 = \frac{w_3}{K},$$

... ...

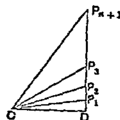
$$\text{स्पज्या } a_{n+1} - \text{स्पज्या } a_n = \frac{w_n}{K}.$$

यदि सब भार बराबर है तो इन समीकरणों के सब दायें पक्ष भी बराबर होंगे और इसलिये यह परिणाम निकलता है कि स्पज्या a_1, स्पज्या a_2, .., स्पज्या a_{n+1} समानान्तर श्रेणी में हैं।

अतः यदि किसी डोरी के भिन्न भिन्न बिन्दुओं पर कुछ बराबर भार लगा दिये जायें, जैसा कि ऊपर किया गया है, तो डोरी के उत्तरोत्तर भागों के क्षैतिज से झुकाव की स्पर्शज्यायें समानान्तर श्रेणी में होंगी जिनका पदान्तर, किसी कण के भार और डोरी के स्थिर क्षैतिज तनाव का भजनफल होगा।

२१५—लेखाचित्रीय रचना। यदि संयोग बहुभुज में, डोरियों के भिन्न भिन्न भागों के झुकाव ज्ञात हों, तो हम ज्यामितीय रचना द्वारा $w_1, w_2, ..., w_n$ की निष्पत्तियाँ आसानी से मालूम कर सकते हैं।

मान लो C कोई बिन्दु है और C से खीची हुई क्षैतिज रेखा CD है। $CP_1, CP_2, .., CP_{n+1}$ को $OA_1, A_1A_2, ..., A_nO_1$ डोरियों के समानान्तर खीचो, इसलिये कोण P_1CD, P_2CD, ..क्रम से $\alpha_1, \alpha_2, ...$ होगें।



इन रेखाओं को $D, P_1, P_2,$ पर काटती हुई कोई ऊर्ध्वाधर रेखा खीचो।

अब पिछली धारा से,

$$\frac{w_1}{K} = \text{स्पज्या } \alpha_2 - \text{स्पज्या } \alpha_1 = \frac{DP_2}{CD} - \frac{DP_1}{CD} = \frac{P_1P_2}{CD},$$

$$\frac{w_2}{K} = \text{स्पज्या } \alpha_3 - \text{स्पज्या } \alpha_2 = \frac{DP_3}{CD} - \frac{DP_2}{CD} = \frac{P_2P_3}{CD},$$

इत्यादि।

अतः $K, w_1, w_2, ..., w_n$ राशियाँ क्रम से $CD, P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_{n+1}$ रेखाओं के समानुपाती हैं और इसलिये यह निष्पत्तियाँ निकाली जा सकती हैं।

ये फल इस बात से भी मालूम हो जाते हैं कि A_1 पर लगे हुये भार के लिये CP_2P_1 बल-त्रिभुज है, इसी प्रकार A_2 पर लगे हुये भार के लिये CP_3P_2 बल-त्रिभुज है, इत्यादि।

इसी प्रकार, यदि जोड़ों पर लटके हुये भार दिये हुये हों, और किन्हीं दो डोरियों की दिशायें भी ज्ञात हों, तो हम दूसरी डोरियों की दिशायें भी निकाल सकते हैं। हम एक ऊर्ध्वाधर रेखा खीचते हैं, और उस पर भार $W_1, W_2, ...$ के अनुपात में $P_1P_2, P_2P_3, ...$ नाप लेते हैं। यदि OA_1, A_1A_2 डोरियों की दिशायें दी गई हों, तो हम इनके समानान्तर P_1O, P_2O खीचते

है और इस प्रकार विन्दु O निकाल लेते हैं। यदि O को $P_3, P_4,$ ..इत्यादि से मिला दें तो शेष डोरियों की दिशायें मालूम हो जाती हैं।

२१६—स्थिति-स्थापक तारों के तनाव। इस पुस्तक में अब तक हमने *तारों और डोरियों को अतन्य माना है, अर्थात् ऐसा माना है कि उनकी* लम्बाई बिना बढ़े हुये ही वे कितना ही तनाव सम्हाल सकती हैं।

व्यवहार में, सभी तार तन्य होते हैं यद्यपि बहुत सी दशाओं में उनकी तन्यता बहुत ही कम अर्थात् उपेक्षणीय होती है। जब तार की तन्यता उपेक्षणीय नहीं होती तो एक सरल प्रयोगात्मक नियम है जो तार के तनाव को उसके वितान से सम्बद्ध करता है। वह इस प्रकार है।

किसी स्थिति-स्थापक तार का तनाव उसकी वास्तविक लम्बाई के अतिरिक्त वितान के अनुपात में होता है।

मान लो एक तार की प्राकृतिक लम्बाई एक फुट है तो उसकी लम्बाई 13 इंच और 15 इंच होने पर उसके तनावों की निष्पत्ति 13—12: 15—12 अर्थात् 1:3 होगी।

इस नियम की प्रयोगात्मक जांच इस प्रकार की जा सकती है; एक सर्पिलाकार स्प्रिंग (कमानी) अथवा एक रबड़ का फीता लो। उसका एक सिरा A किसी नियत विन्दु से लगा दो और उसके दूसरे सिरे B पर भार *लगाओ, तथा भारों से जो वितान हों उन्हें देखो, तो मालूम होगा कि यह* वितान लगभग भारों के अनुपात में हैं। भारो के परिमाण स्प्रिंग अथवा रबड़ के फीते की मजबूती पर निर्भर हैं। सबसे बड़ा भार इतना अधिक नहीं होना चाहिये कि वह स्प्रिंग अथवा फीते को विरूप कर दे।

२१७—विद्यार्थी को स्मरण रखना चाहिये कि तार का तनाव उसकी *तनी हुई लम्बाई के अनुपात में नहीं होता परन्तु उसके वितान के अनुपात में होता है।*

इस नियम को हुक (१६३५–१७०३ ई०) ने मालूम किया था और इस रूप में अपनी पुस्तक (Ut tensio, sicvis) उत् टेन्सिओ जिकविस में दिया था। इससे हम आसानी से वह सूत्र मालूम कर सकते हैं जिससे वितान किसी भी अवस्था में मालूम किया जा सकता है।

मान लो तार की विना तनी हुई लम्बाई a है और T उसका तनाव है जब उसकी लम्बाई तान कर x कर दी गई हो। अब क्योंकि वितान $x-a$ है, इसलिये नियम बतलाता है कि

$$T \propto x-a.$$

इसे प्रायः $$T=\lambda.\frac{x-a}{a},$$

रूप में व्यक्त करते हैं इस फल में $\frac{\lambda}{a}$ अचल राशि है।

राशि λ केवल तार की मोटाई और जिस पदार्थ से वह बना हुआ हो, उस पर निर्भर रहती है, और इसे तार का स्थिति-स्थापन-मापक कहते हैं।

यह उस बल के बराबर होता है जो एक चिकनी मेज पर रखे हुये, तार को, प्राकृतिक लम्बाई की दुगनी के बराबर तान देगा ; क्योंकि जब $x=2a$, तो तनाव

$$=\lambda\frac{2a-a}{a}=\lambda.$$

कोई भी स्थिति-स्थापक तार असीम तनाव नहीं सह सकता है। जब कोई तार ताने जाने पर टूटने की सीमा पर होता है तो उसके तनाव को सीमान्त तनाव कहते हैं।

हुक का नियम फौलाद और दूसरे धातु की बनी छड़ों के लिये भी सही है, परन्तु इनमें वह वितान जिसके लिये यह सही होता है बहुत कम होता है। हम किसी छड़ को उसकी प्राकृतिक लम्बाई की दुगनी के बराबर नहीं खींच सकते ; परन्तु λ उस बल का सौ गुना होगा जो छड को उसकी प्राकृतिक लम्बाई का $\frac{1}{100}$ वाँ बढ़ा देता है। क्योंकि यदि

$$x-a=\frac{a}{100}, \text{ तो } T=\frac{\lambda}{100}।$$

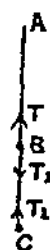
T का मान छड़ की मोटाई पर भी निर्भर होता है और छड़ को प्रायः ऐसा लेते हैं जिसका परिच्छेद एक वर्ग इंच हो। इसलिये एक फौलादी छड़ का स्थिति-स्थापन-मापक लगभग 13500 टन प्रति वर्ग इंच होता है।

धारा १३४ की विधि से यह आसानी से मालूम हो जायगा कि किसी स्थिति-स्थापक तार के तानने में जो कर्म होता है वह वितान और प्रारम्भिक और अन्तिम तनावों के मध्यमान के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण। ABC एक स्थिति-स्थापक तार है, जो एक नियत बिन्दु A से ऊर्ध्वाधर लटका हुआ है। B और C से क्रम से $2W$ और W भार के कण लगे हुये हैं। यदि तार का स्थिति-स्थापन-मापक $3W$ है, तो तार के भागों की तनी हुई लम्बाइयों की उनकी बिना तनी हुई लम्बाइयों से निष्पत्तियाँ मालूम करो।

मान लो AB और BC की बिना तनी हुई लम्बाइयाँ c और c_1 हैं और उनकी तनी हुई लम्बाइयाँ x और y हैं।

मान लो T और T_1 उनके तनाव हैं, इसलिये



$$T=\lambda\frac{x-c}{c}=3W\frac{x-c}{c},$$

और
$$T_1=\lambda\frac{y-c_1}{c_1}=3W\frac{y-c_1}{c_1}.$$

चूंकि B और C समतुलित अवस्था में हैं, इसलिये

$$T-T_1=2W, \text{ और } T_1=W.$$

अत
$$T=3W.$$

$$\therefore\ 3W\frac{x-c}{c}=3W, \text{ और } 3W\frac{y-c_1}{c_1}=W.$$

$$\therefore\ x=2c, \text{ और } y=\tfrac{4}{3}c_1.$$

अतः तनी हुई लम्बाइयाँ क्रमसे प्राकृतिक लम्बाइयों की दुगनी और चार तिहाई है।

उदाहरणमाला ३७

१। ABC एक स्थिति-स्थापक तार है, जिसका स्थापन-मापक $4W$ है, और जो एक नियत बिन्दु A पर बँधा हुआ है। B और C पर W के बराबर भार लगे हुये हैं और AB और BC की बिना तनी हुई लम्बाई

c के बराबर है। सिद्ध करो कि, यदि तार और भार समतुलित अवस्था में ऊर्ध्वाधर रहते हैं, तो AB और BC की तनी हुई लम्बाइयाँ क्रमसे $\frac{8}{3}c$ और $\frac{5}{3}c$ होंगी।

२। एक स्थिति-स्थापक तार के सिरे एक ही क्षैतिज धरातल में दो बिन्दुओं से बँधे हुये हैं, और आरम्भ में वह ठीक सीधा परन्तु बिना तना हुआ है। एक कण, जिसका भार W है तार के मध्य-बिन्दु से बाँध दिया गया है। यदि स्थिति-स्थापन-मापक $\frac{W}{\sqrt{3}}$ है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में तार के दोनों भागों में $60°$ का कोण होगा।

३। पिछले प्रश्न में यदि दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी $2a$ है, तार की बिना तनी हुई लम्बाई $2c$ है और स्थिति-स्थापन-मापक λ है, तो सिद्ध करो कि ऊर्ध्वाधर से तार का झुकाव θ समीकरण

$$\frac{W}{2\lambda}\,\text{स्पज्या}\,\theta+\text{ज्या}\,\theta=\frac{a}{c}$$

से दिया जता है।

४। एक पिंड एक रूक्ष आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव घर्षण-कोण λ से अधिक है, रखा हुआ है; उससे एक स्थिति-स्थापक तार बँधा हुआ है जो उसे समतुलित अवस्था में रखे हुये है और जिसका दूसरा सिरा धरातल में एक बिन्दु से बँधा हुआ है। यदि स्थिति-स्थापन-मापक पिंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में तार की लम्बाई की उसकी मौलिक लम्बाई से निष्पत्ति

$$1+\text{ज्या}(\alpha-\lambda)\ \text{व्युकोज्या}\ \lambda \text{ है।}$$

५। चार बराबर कब्जों द्वारा जुड़े हुये दड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई a है, एक शीर्ष-बिन्दु से लटके हुये हैं, जो सामने के शीर्ष से एक स्थिति-स्थापन तार से बँधा हुआ है। यदि दंड एक वर्ग के आकार में लटके हों और यदि तार का स्थिति-स्थापन-मापक एक दंड के भार के बराबर है, तो सिद्ध करो कि तार की बिना तनी लम्बाई $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ होगी।

६। एक स्थिति-स्थापक तार, जिसकी प्राकृतिक लम्बाई 10 इंच है, 5 पौं० भार के एक बल से 15 इंच की लम्बाई तक ताना जा सकता है। बताओ 12 इंच की लम्बाई से 15 इंच की लम्बाई तक उसे तानने में कितना कर्म करना पड़ेगा।

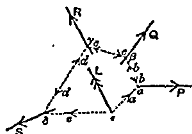
७। एक सर्पिलाकार स्प्रिंग (कमानी) को एक इंच तानने में एक पौंड भार का बल लगाना होता है। उसे 3 इंच अधिक तानने में कितना कर्म करना पड़ेगा ?

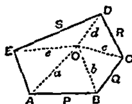
लेखा-चित्रीय रचनायें

२१—समतलीय बलों का परिणामीबल मालूम करना।

मान लो बल $P, Q, R,$ और S हैं जिनकी क्रिय-रेखायें बायें चित्र में दिखलाई गई हैं।

चित्र $ABCDE$ खींचो जिसकी भुजायें $AB, BC, CD,$ और DE क्रमसे $P, Q, R,$ और S के समानान्तर और अनुपातीय हैं। AE को मिला दो, इसलिये बल बहुभुज से AE इष्ट परिणामीबल को परिमाण और दिशा में, प्रदर्शित करेगा।





कोई विन्दु O लो और उसे A $B, C, D,$ और E से मिलाओ। मान लो इन मिलाने वाली रेखाओं की लम्बाइयाँ क्रम से $a, b, c, d,$ और e हैं।

P को क्रिया-रेखा पर कोई विन्दु α लो। $\alpha\beta$ को BO के समानान्तर खींचो जो Q को β पर मिले। $\beta\gamma$ को CO के समानान्तर खींचो जो R को γ पर मिले, और $\gamma\delta$ को DO के समानान्तर खींचो जो S को δ पर मिले।

δ और a से क्रम से EO और OA के समानान्तर रेखायें खींचो जो एक दूसरे को ϵ पर मिले।

ϵ से ϵL को AE के समानान्तर और बराबर खींचो। अब ϵL इष्ट परिणामीबल को परिमाण और क्रिया-रेखा में उसी पैमाने पर प्रदर्शित करेगी जिस पैमाने पर AB, P को प्रदर्शित करती है।

क्योंकि P, जो AB से प्रदर्शित किया गया है, AO और OB से प्रदर्शित किये गये बलों के बराबर है, इसलिये उसके स्थान पर ϵa और βa दिशा में a और b के बराबर बल रखे जा सकते है। इसी प्रकार Q के स्थान पर $a\beta$ और $\gamma\beta$ दिशा में b और c के बराबर बल, R के स्थान पर $\beta\gamma$ और $\delta\gamma$ दिशा में c और d के बराबर बल, और S के स्थान पर $\gamma\delta$ और $\epsilon\delta$ दिशा में d और e के बराबर बल रखे जा सकते हैं।

इस प्रकार बल $P, Q, R,$ और S के स्थानों पर चित्र $a\beta\gamma\delta\epsilon$ की भुजाओं की सीध में बल, रखे जा सकते है जिनमें से $a\beta, \beta\gamma,$ और $\gamma\delta$ समतुलित हैं।

अतः अब हमारे पास वे बल रह गये जो ϵ पर कार्य करते हैं और AO और OE के समानान्तर है और जिनका परिणामीबल AE है।

क्योंकि ϵL को AE के समानान्तर और बराबर खींचा गया है, इसलिये यह ही परिणामीबल के परिमाण और क्रिया-रेखा को प्रदर्शित करता है।

ऐसे चित्र को जैसा कि $ABCDE$ है, बल-बहुभुज कहते हैं, और ऐसे चित्र को जैसा कि $a\beta\gamma\delta\epsilon$ है संयोग-बहुभुज कहते है।

२१९—यदि बल-बहुभुज का बिन्दु E, A पर पडे, तो बहुभुज बन्द हो जाता है और तब परिणामीबल शून्य हो जाता है।

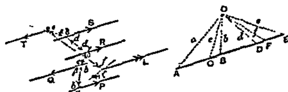
यदि बल-बहुभुज तो बन्द है, परन्तु संयोग-बहुभुज बन्द नहीं है, अर्थात् यदि $\delta\epsilon a$ एक सरल रेखा नहीं है, तो हमारे पास OE और AE के समानान्तर δ और a पर कार्य करते हुये दो बल रह जाते है अर्थात

हमारे पास दो बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर बल रह जाते हैं जो एक बलयुग्म के बराबर हैं ।

यदि संयोग-बहुभुज भी बन्द होता, तो $\iota\epsilon a$ एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों बराबर समानान्तर बल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अतः यदि बल P, Q, R, S समतुलित हैं, तो उनके बल-बहुभुज और संयोग-बहुभुज दोनों ही बन्द होंगे ।

२२०—*यदि बल समानान्तर हैं तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली* धारा में है। नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खींचा गया है जब



बल समानान्तर हैं और पाँच में से दो बल शेष तीन बलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

चूँकि $P, R,$ और S एक ही दिशा में हैं, इसलिये $AB, CD,$ और DE एक ही दिशा में होंगी, और BC और EF, जो Q और T को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण वैसा ही है जैसा पिछली धारा में है। रेखा ιL जो AF के बराबर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीबल को परिमाण और क्रिय-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणामी भार मालूम करने में भी किया जाता है ।

२२१—हलकी छड़ों के एक बन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे से सिरों पर स्वतन्त्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं, एक बल-समुदाय लगाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो समतुलित हैं, कार्य करता है; छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें मालूम करो।

मान लो $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_1$ पाँच छड़ों का एक समुदाय है जो अपने सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल $P_1, P_2, P_3, P_4,$ और P_5 इस प्रकार लगाये गये हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें t_1, t_2, t_3, t_4 और t_5 हैं, जैसा कि चित्र में चिन्ह द्वारा दिखलाया गया है।

पंचभुज $a_5a_1a_2a_3a_4$ खींचो जिसकी भुजायें बल $P_1, P_2, .., P_5$ के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुलित हैं इसलिये यह बहुभुज एक बन्द चित्र होगा।

a_1 से a_1O, A_1A_2 के, और a_5 से a_5O, A_5A_1 के समानान्तर खींचो।

अब त्रिभुज a_5Oa_1 की भुजायें P_1, t_1 और t_5 बलों के जो जोड़ A_1 पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं। इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर a_5a_1, P_1 को प्रदर्शित करती है, भुजायें Oa_5 और a_1O, t_5 और t_1 को प्रदर्शित करेंगी।

$Oa_2, Oa_3,$ और Oa_4 को मिला दो।

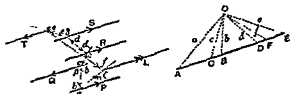
a_1a_2 और Oa_1 भुजायें P_2 और t_1 बलों को जो A_2 पर कार्य करते

हमारे पास दो बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर बल रह जाते हैं जो एक बलयुग्म के बराबर हैं ।

यदि संयोग-बहुभुज भी बन्द होता, तो $\epsilon\epsilon a$ एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों बराबर समानान्तर बल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अत: यदि बल P, Q, R, S समतुलित हैं, तो उनके बल-बहुभुज और संयोग-बहुभुज दोनों ही बन्द होंगे ।

२२०—यदि बल समानान्तर हैं तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली धारा में है। नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खींचा गया है जब



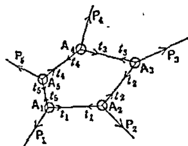
बल समानान्तर हैं और पाँच में से दो बल शेष तीन बलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

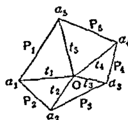
चूंकि P, R, और S एक ही दिशा में हैं, इसलिये AB, CD, और DE एक ही दिशा में होंगी, और BC और EF, जो Q और T को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण वैसा ही है जैसा पिछली धारा में है। रेखा ξL जो AF के बराबर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीबल को परिमाण और क्रिया-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणामी भार मालूम करने में भी किया जाता है ।

२२१--हल्की छड़ों के एक बन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे से सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं, एक बल-समुदाय लगाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो सम्तुलित हैं, कार्य करत है ; छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें मालूम करो ।





मान लो $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_1$ पाँच छड़ों का एक समुदाय है जो अपने सिरो पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल P_1, P_2, P_3, P_4, और P_5 इस प्रकार लगाये गये है जैसा कि चित्र मे दिखलाया गया है ।

मान लो छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें t_1, t_2, t_3, t_4 और t_5 हैं, जैसा कि चित्र में चिन्ह द्वारा दिखलाया गया है ।

पंचभुज $a_5a_1a_2a_3a_4$ खींचो जिसकी भुजायें बल $P_1, P_2, .., P_5$ के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुलित हैं इसलिये यह बहुभुज एक बन्द चित्र होगा ।

a_1 से a_1O, A_1A_2 के, और a_5 से a_5O, A_5A_1 के समानान्तर खींचो ।

अब त्रिभुज a_5Oa_1 की भुजायें P_1, t_1 और t_5 बलो के जो जोड A_1 पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं । इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर a_5a_1, P_1 को प्रदर्शित करती है, भुजायें Oa_5 और a_1O, t_5 और t_1 को प्रदर्शित करेंगी ।

Oa_2, Oa_3, और Oa_4 को मिला दो ।

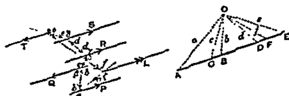
a_1a_2 और Oa_1 भुजायें P_2 और t_1 बलों को जो A_2 पर कार्य करते,

हमारे पास दो वरावर परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये समानान्तर वल रह जाते हैं जो एक बलयुग्म के वरावर हैं ।

यदि सयोग-वहुभुज भी वन्द होता, तो εea एक सरल रेखा होती और विपरीत दिशाओं में कार्य करते हुये ये दोनों वरावर समानान्तर वल एक ही सरल रेखा में होंगे और इसलिये समतुलित होंगे ।

अत: यदि वल P, Q, R, S समतुलित हे, तो उनके वल-वहुभुज और सयोग-वहुभुज दोनों ही वन्द होंगे ।

२२०—यदि वल समानान्तर हे तो भी रचना वही होगी जैसी कि पिछली धारा में हैं। नीचे का चित्र उस स्थिति के लिये खीचा गया है जव



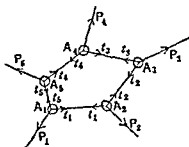
वल समानान्तर हैं और पाँच में से दो वल शेप तीन वलों से विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

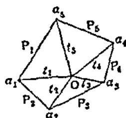
चूंकि $P, R,$ और S एक ही दिशा में हे, इसलिये $AB, CD,$ और DE एक ही दिशा में होंगी, और BC और EF, जो Q और T को प्रदर्शित करती हैं, विपरीत दिशा में होंगी ।

रचना का प्रमाण वैसा ही है जैसा पिछली धारा में है। रेखा ζL जो AF के बरावर और समानान्तर है, इष्ट परिणामीवल को परिमाण और क्रिय-रेखा में प्रदर्शित करती है ।

इस रचना का प्रयोग कुछ भारों के परिणाम भी किया जाता है ।

२२१--हल्की छड़ों के एक बन्द बहुभुज पर जो एक दूसरे से सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं, एक बल-समुदाय लगाया गया है जो उनके जोड़ों पर, जो समतुलित है, कार्य करते हैं ; छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें मालूम करो।





मान लो A_1A_2, A_2A_3,..., A_5A_1 पाँच छड़ों का एक समुदाय है जो अपने सिरों पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़ा हुआ है और मान लो दिये हुये बल P_1, P_2, P_3, P_4, और P_5 इस प्रकार लगाये गये हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो छड़ों पर कार्य करती हुई क्रियायें t_1, t_2, t_3, t_4 और t_5 हैं, जैसा कि चित्र में चिन्ह द्वारा दिखलाया गया है।

पंचभुज $a_5a_1a_2a_3a_4$ खीचो जिसकी भुजायें बल $P_1, P_2, ..., P_5$ के समानान्तर और अनुपात में हैं। क्योंकि बल समतुलित हैं इसलिये यह बहुभुज एक बन्द चित्र होगा।

a_1 से a_1O, A_1A_2 के, और a_5 से a_5O, A_5A_1 के समानान्तर खीचो।

अब त्रिभुज a_5Oa_1 की भुजायें P_1, t_1 और t_5 बलों के जो जोड़ A_1 पर कार्य करते हैं, समानान्तर हैं। इसलिये इसकी भुजायें इन बलों के अनुपात में हैं। अतः उसी पैमाने पर जिसपर a_5a_1, P_1 को प्रदर्शित करती है, भुजायें Oa_5 और a_1O, t_5 और t_1 को प्रदर्शित करेंगी।

Oa_2, Oa_3, और Oa_4 को मिला दो।

a_1a_2 और Oa_1 भुजायें P_2 और t_1 बलों को जो A_2 पर कार्य करते

करते हैं, प्रदर्शित करती हैं । अतः a_2O, जो त्रिभुज a_1Oa_2 को पूरा करती है, तीसरे बल t_2 को परिमाण और दिशा में प्रदर्शित करती है ।

इसी प्रकार Oa_3 और Oa_4 क्रमसे t_3 और t_4 को प्रदर्शित करती हैं ।

इसलिये रेखायें Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 और Oa_5 परिमाण और दिशा में, ठाट की भुजाओं पर कार्य करते हुये बलों को प्रदर्शित करती है । चित्र $a_1a_2a_3a_4a_5$ को बल-बहुभुज कहते हैं ।

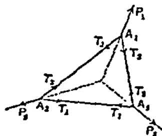
ठाट में कितनी ही भुजायें क्यों न हों, इसी प्रकार की रचना उसमें भी की जा सकती हैं ।

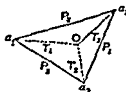
२२२—यह स्पष्ट हैं कि पिछली धारा के चित्र और रचना वास्तव में वही हैं जो धारा २१८ में है ।

यदि दायाँ चित्र $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4,$.. छड़ों के ठाट को प्रदर्शित करता है, जिसके जोड़ों पर बल $a_1O, a_2O,$.. पर कार्य करते हैं, तो बायें चित्र का बहुभुज $A_1A_2A_3A_4A_5$ स्पष्टतः उसका बल-बहुभुज होगा, क्योंकि $A_1A_2, A_2A_3,$ ..क्रमसे $a_1O, a_2O,$ ..के समानान्तर हे ।

अतः यदि इन दोनों बहुभुजों में से किसी एक को ठाट अथवा संयोग-बहुभुज मान लें तो दूसरा बल-बहुभुज हो जयगा । इसलिये ऐसे चित्रों को एक दूसरे का व्युत्क्रम कहते हैं ।

एक और उदाहरण के रूप में हम एक त्रिभुजीय ठाट देते हैं जिसके जोड़ों पर तीन बल P_1, P_2, P_3 कार्य करते हैं और जो समतुलित रहते हैं

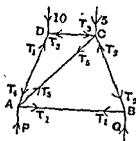


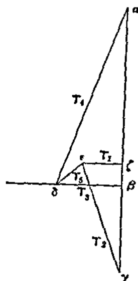


और जिसका बल-बहुभुज $a_2a_3a_1$ है ; विलोमतः $A_3A_2A_1$ त्रिभुज $a_1a_2a_3$ का बल-बहुभुज है जिस पर बल $T_1, T_2,$ और T_3 कार्य करते हैं ।

२२३—उदाहरण १। हल्की छड़ों का एक ठाट $ABCD$ जो एक बंधन AC से कसा हुआ है ऊर्ध्वाधर धरातल में A और B आलम्बनों पर इस प्रकार से रखा हुआ है कि AB क्षैतिज है। AB, BC, CD, और DA की लम्बाइयाँ क्रम से 4,3,2 और 3 फुट हैं। AB और CD समानान्तर हैं और AD और BC के AB पर झुकाव बराबर हैं। यदि 5 और 10 हन्डरवेट के भार क्रमशः C और D पर रखे जायँ तो A और B पर आलम्बनों के प्रतिबल और ठाट के भिन्न भिन्न भागों पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

मान लो भुजाओं पर कार्य करते हुये बल इस प्रकार हैं जैसा चित्र में दिखलाया गया है और मान लो A और B पर प्रतिबल P और Q हैं।





$\alpha\beta$ एक ऊर्ध्वाधर रेखा 5 इंच लम्बी खींचो जो D पर 10 हण्डरवेट भार को प्रदर्शित करे। फिर $\alpha\delta$, AD के समानान्तर और $\beta\delta$, CD के समानान्तर खींचो। तो जोड़ D के लिये $\alpha\beta\delta$ बल-त्रिभुज होगा और D पर कार्य करते हुये बल चित्र में दिखलाई गई दिशाओं में होंगी।

यह स्मरण रहे कि छड़ DC में C पर बल DC अथवा CD पर होगा और उसी छड़ में D पर बल CD अथवा DC पर होगा।

[यह एक आवश्यक व्यापक सिद्धान्त है ; क्योंकि कोई छड़ जिस पर दबाव पड़ता है वह या तो संपीड़न होने की प्रवृत्ति का प्रतिरोध करती है या उसमें बढ़ने की प्रवृत्ति होती है।

पहली अवस्था में उसके प्रत्येक सिरे पर क्रिया केन्द्र से सिरों की ओर कार्य करती है और यह स्ट्रट कहलाती है, और दूसरी अवस्था में क्रिया उसके केन्द्र की ओर कार्य करती है और यह टाई कहलाती है।

दोनों ही अवस्थाओं में छड़ के दोनों सिरों पर क्रियायें बराबर और विपरीत होती है।]

$\beta\gamma$ ऊर्ध्वाधर $2\frac{1}{2}$ इंच के बराबर खींचो जो C पर रखे हुये भार को प्रदर्शित करे। BC के $\gamma\epsilon$ और AC $\delta\epsilon$ के समानान्तर खींचो। अब $\delta\beta\gamma\epsilon\delta$ जोड़ C का बल-बहुभुज है। अत: C पर क्रियायें इस प्रकार है जैसा कि चित्र में दिखलाई गई हैं।

$\epsilon\zeta$ को क्षैतिज खींचो जो $\alpha\gamma$ को ζ पर मिले।

अब $\epsilon\gamma\zeta$ जोड़ B का बल-त्रिभुज है, इसलिये $\gamma\zeta$ से प्रतिबल Q और $\zeta\epsilon$ से T_1 प्रदर्शित होता है।

अन्त में जोड़ A का बल-बहुभुज $\delta\epsilon\zeta\alpha\delta$ है, इसलिये P, $\zeta\alpha$ से प्रदर्शित होता है।

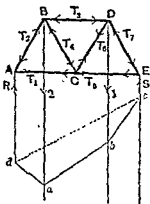
इंचों में नाप कर, $\epsilon\zeta=1{\cdot}10$, $\gamma\epsilon=3\ 31$, $\delta\beta=1{\cdot}77$, $\delta\alpha=5\ 30$, $\delta\epsilon={\cdot}91$, $\gamma\zeta=3\ 125$, और $\zeta\alpha=4{\cdot}375$.

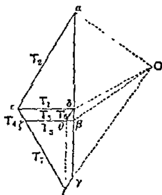
अत: चूंकि एक इंच 2 हन्डरवेट को प्रदर्शित करता है, इसलिये हन्डरवेटों में $T_1=2\ 20$, $T_2=6\ 62$, $T_3=3\ 54$, $T_4=10\ 6$, $T_5=1{\cdot}82$, $Q=6{\cdot}25$, और $P=8\ 75$.

यह स्मरण रहे कि AB और AC छड़ें तनाव अथवा बढ़ने की अवस्था में हैं अर्थात् ये टाई हैं, और शेष की शेष छड़ें सम्पीड़न अथवा सिकुड़ने की अवस्था में हैं अर्थात् ये स्ट्रट्स हैं।

धारा २२० की रचना से P और Q के मान भी मालूम किये जा सकते हैं जैसे R और S के मान अगले उदाहरण में मालूम किये गये हैं।

उदाहरण २। वेरन गर्डर का एक भाग एक हल्के ढाचे का बना हुआ है जिसमें तीन समत्रिबाहु त्रिभुज ABC, CBD और CDE है। ACE क्षैतिज अवस्था में A और E पर रुका हुआ है। 2 और 1 टन के भार B और D पर लटके हुये हैं। गर्डर के भिन्न भिन्न भागों पर दबाव मालूम करो।





$\alpha\beta$ और $\beta\gamma$ क्रमसे 2 इंच और 1 इंच के बराबर 2 टन और 1 टन को प्रदर्शित करते हुये ऊर्ध्वाधर खींचो। कोई मूल-बिन्दु O लो और $O\alpha$, $O\beta$, तथा $O\gamma$ को मिला दो।

2 टन भार की क्रिया-रेखा पर कोई बिन्दु a लो। αO के समानान्तर ad खीचो जो प्रतिबल R को d पर मिले, और βO के समानान्तर ab खीचो जो D से खीची गई ऊर्ध्वाधर रेखा को b पर मिले, और अब γO के समानान्तर bc खीचो जो S को c पर मिले। cd को मिला दो। अब $abcd$ संयोग-बहुभुज है जिसका (यदि हम $O\delta$ cd के समानान्तर $O\delta$ खीचें) बल-बहुभुज $\alpha\beta\gamma\delta$ है (जो इस अवस्था में एक सरल रेखा है)। अतः R को $\delta\alpha$ और S को $\gamma\delta$ प्रदर्शित करेंगी।

मान लो छड़ों द्वारा प्रयुक्त किये गये बल, चाहे वे दबाव हों या तनाव $T_1, T_2, \ldots$ हैं जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

CA के $\delta\epsilon$ और AB के $\alpha\epsilon$ समानान्तर खींचो। अब जोड़ A के लिये $\alpha\epsilon\delta$ बल-त्रिभुज होगा; इसलिये $\alpha\epsilon$ और $\epsilon\delta$, T_2 और T_1 को प्रदर्शित करेंगी।

$\epsilon\zeta$ और $\beta\zeta$ क्रम से BC और BD के समानान्तर खींचो। अब जोड़ B के लिये $\epsilon\alpha\beta\zeta$ बल-बहुभुज होगा, इसलिये $\epsilon\zeta$ और $\zeta\beta$ क्रम से T_4 और T_3 को प्रदर्शित करेंगी।

DC के समानान्तर $\delta\theta$ खींचो। अब जोड़ C के लिये $\delta\epsilon\zeta\theta$ बल-बहुभुज होगा; इसलिये $\zeta\theta$ और $\theta\delta$, T_5 और T_6 को प्रदर्शित करेंगी।

DC के समानान्तर $\gamma\iota$ खींचो जो $\epsilon\zeta$ को बढ़ाये जाने पर ι पर मिले। अब जोड D के लिये $\zeta\beta\gamma\iota$ बल-बहुभुज है, इसलिये $\gamma\iota$ और $\iota\zeta$ क्रम से T_6 और T_7 को प्रदर्शित करती हैं; [इससे यह परिणाम निकलता है कि $\gamma\iota$ $\delta\theta$ के बराबर और समानान्तर होगी अतः $\iota\theta$, $\gamma\delta$ के बराबर और समानान्तर होगी और इसलिये S को प्रदर्शित करेगी।]

अन्त में जोड़ E के लिये $\iota\theta\zeta$ बल-त्रिभुज है।

अतः यदि हम $\alpha\delta, \delta\gamma, \epsilon\delta, \epsilon\alpha, \zeta\beta, \epsilon\zeta, \zeta\theta, \theta\delta, \iota\zeta$ लम्बाइयों को इंचों में नापें, तो क्रमशः $R, S, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ के मान टन भारों में निकल आते हैं। यह क्रम से 1·75, 1·25 1·01, 2 02, ·87, ·29, ·72, ·29, और 1·44 टन भार हैं।

चित्र से यह स्पष्ट है कि AC, CE, और CD टाई हैं और शेष स्ट्रट्स।

उदाहरणमाला ३८

[निम्नलिखित प्रश्न लेखा-चित्रीय रीति से करने चाहिये।]

१। एक सम त्रिभुजीय पटल ABC, जिसका भार 30 पौं॰ है, B पर लगे एक कब्जे के चारों ओर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में घूम सकता है। वह BC के मध्य-विन्दु पर लगी एक खूंटी पर इस प्रकार रखा हुआ समतुलित

अवस्था में है कि उसकी भुजा *AB* क्षैतिज रहती है। यदि भुजायें *AB*, *BC* और *CA* क्रम से 6,5 और 4 फुट लम्बी हैं तो खूंटी पर दबाव और कब्जे पर विक्रिया मालूम करो।

२। एक 30 फुट लम्बी सम सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी दीवार पर और दूसरा सिरा रूक्ष भूमि पर रखा हुआ है। उसके पद की दीवार से दूरी 10 फुट है। भूमि द्वारा उसके पद पर लगाया गया बल मालूम करो यदि सीढ़ी का भार 150 पौं० है, (१) जब सीढ़ी पर कोई और भार नही है, (२) जब सीढ़ी पर उसकी लम्बाई के $\frac{2}{3}$ पर 1 हण्डरवेट का भार रखा हुआ है।

३। यह प्रयोग द्वारा मालूम किया गया है कि किसी आनत धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव 45° है, रखे हुये 10 पौ० भार को धरातल पर ऊपर की ओर फिसलाने के लिये 10 पौ० भार की आवश्यकता होती है। भार और धरातल के बीच का घर्षण-गुणक मालूम करो।

४। एक चिकनी मेज पर रखे हुये एक चपटे मडल के तीन दिये हुये बिन्दुओं पर क्रमशः 5·05 पौं०, 4·24 पौ० और 3·85 पौं० के बल लगाये गये हैं। ज्यामितीय रचना द्वारा बलों को इस प्रकार लगाओ कि मंडल समतुलित अवस्था में रहे और बलों के बीच के कोणों में अंशों की संख्या मालूम करो।

५। एक सम आयताकार कुंदा, जिसके गुरुत्व-केन्द्र से खींचा गया सममित् परिच्छेद *ABCD* है, इस प्रकार रखा हुआ है कि *CD* एक रूक्ष क्षैतिज धरातल को स्पर्श करता है ($\mu = \frac{1}{3}$)। कुन्दे का भार 40 पौं० है, और 10 पौं० भार का एक बल *D* पर *CD* की दिशा में कार्य करता है। यदि *BC* और *CD* की लम्बाई क्रमशः 3 और 5 फुट हैं, तो वह लघुतम भार मालूम करो, जिसे यदि *CD* के मध्य-बिन्दु पर विकर्ण *DB* के समानान्तर लगायें तो वह कुंदे को फिसला सके।

६। 100 पौ० भार का एक पिंड एक रूक्ष धरातल पर रखा हुआ है जिसका झुकाव 3 में 1 है। घर्षण-गुणक $\frac{1}{3}$ है। वह बल मालूम करो जिसे यदि धरातल से 40° के कोण पर लगायें तो पिंड धरातल के ऊपर में फिसलने की सीमा पर हो। वह बल भी मालूम करो जिसे यदि धरातल से 40° के कोण पर लगायें तो पिंड धरातल में फिसलने की सीमा पर हो।

७। ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजायें AB, BC, CA क्रमसे 12, 10 और 15 इंच लम्बी हैं और B से CA पर BD लम्ब है। बल और संयोगब-हुभुज के द्वारा निम्न बलों के परिणामी बल का परिमाण और उनकी क्रिया-रेखा मालूम करो, A से C तक 8, C से B तक 8, B से A तक 3 और B से D तक 2।

८। AB एक सरल रेखा 3 फुट लम्बी है। A और B पर क्रमशः 7 और 5 हन्डरवेट के (१) सम, (२) विषम समानान्तर बल लगाये गये हैं। प्रत्येक स्थिति में बिन्दु D के स्थान को रचना द्वारा मालूम करो जिस पर उनका परिणामीबल AB को मिलता है और A से उसकी दूरी भी मालूम करो।

९। 2, 4 और 3 हण्डरवेट के भार 10 फुट लम्बी एक छड़ पर उसके एक सिरे से 1, 3, और 7 फुट की दूरी पर रखे हुये हैं। उनके परिणामी बल की क्रिया-रेखा ठीक ठीक खीच कर दिखलाओ।

१०। 20 फुट लम्बी एक क्षैतिज छड़ सिरों पर रुकी हुई है और उसके एक सिरे से 3, 7, 12 और 15 फुट की दूरी पर क्रमसे 3, 2, 5 और 4 हण्डरवेट के भार लटके हुये हैं। संयोग-त्रिभुज द्वारा सिरों पर दबाव मालूम करो।

११। जुड़ी हुई छड़ों का एक त्रिभुजीय ढाँचा ABC, जो A पर समकोणीय है, A के चारों ओर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में घूम सकता है। भुजा AB क्षैतिज है और A के नीचे एक चिकनी ऊर्ध्वाधर खूँटी के सहारे कोण C रखा हुआ है। यदि $AB=3$ फुट, $AC=1$ फुट, और B पर 50 पौं० का एक भार लटका हुआ है, तो लेखा-चित्रीय विधि द्वारा भिन्न भिन्न छड़ों पर दबाव मालूम करो।

१२। 1, 2, 4 और 4 पौं० भार के बल एक वर्ग की AB, BC, CD और DA भुजाओं पर कार्य करते हैं। सिद्ध करो कि उनका परिणामी बल 36 पौं० भार के बराबर है और CB से कोण स्पज्या$^{-1}\frac{3}{2}$ बनाता है तथा बढ़ाई हुई BC को G पर मिलता है, जहाँ पर $CG = \frac{5}{3}BC$

१३। AC और CB दो बराबर छड़ें एक दूसरे से $40°$ का कोण बनाती हैं। उनके सिरे A और B भूमि पर रखे हुये हैं। जो इतनी रूक्ष है कि उन्हें फिसलने नहीं देती। धरातल ACB भूमि से $70°$ के कोण पर झुका हुआ है। C पर 10 हण्डरवेट भार का एक पिंड लगा हुआ है और पूरा समुदाय C से बँधी हुई एक रस्सी से रुका हुआ है, जो C और AB के मध्य-विन्दु से जाते हुये एक ऊर्ध्वाधर धरातल में है। यदि रस्सी भूमि से बाँध दी जाय और भूमि से $50°$ का कोण बनाये, तो रस्सी का तनाव और छड़ों पर क्रियायें मालूम करो। [इस तरतीब को निरा-टाँगें कहते है।]

१४। 140 पौं० भार की एक छड़ AB का एक सिरा A एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखा है और दूसरा सिरा B एक डोरी से सम्हाला जाता है जो एक चिकनी घिरनी पर से जाती है जिसकी A से क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरी क्रम से 15 और 20 फुट है। यदि छड की लम्बाई 15 फुट है, और यदि जब सिरा B क्षैतिज धरातल से 9 फुट की ऊँचाई पर है तो वह फिसलने की सीमा पर हो, तो घर्षण-गुणक, डोरी के तनाव और A पर परिणामी प्रतिबल मालूम करो।

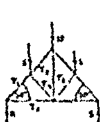
१५। सिरों पर जुड़ी हुई तीन छडों से बना हुआ एक त्रिभुजीय ढाँचा ABC समतुलित अवस्था में हो जाता है जब उस पर तीन बल P, Q और R उसके शीर्षों पर बाहर की ओर लगाये जाते हैं और जब प्रत्येक बल की क्रिया-रेखा वह रेखा है जो उसके प्रयोग-विन्दु को सम्मुख की छड के मध्य-विन्दु से मिलाती है। यदि BC, CA और AB भुजाओं की लम्बाई क्रमसे 9 फुट, 8 फुट और 7 फुट हैं, और यदि बल P, 50 पौं० भार के बराबर है, तो Q और R और उन बलों के मान मालूम करो जो ढाँचे की छड़ों पर कार्य करते हैं।

१६। A और B दो नियत खूँटियाँ हैं। A से B ऊँची है। एक भारी छड़ B के ऊपर रखी हुई A के नीचे से जाती है। यदि छड़ और खूँटियों के बीच के घर्षण-कोण वही हों, तो सिद्ध करो कि छड़ भी ऐसी अवस्था में समतुलित रह सकती है जिसमे उसका आगे हो और AB का क्षैतिज से झुकाव घर्षण-क किसी और अधिक झुकाव के लिये B के आगे गुरु दूरी लेखा-चित्र द्वारा निकालो जो समतुलन के

१७। एक सम दंड AB, जिसका भार 10 BD दो डोरियों से रुका हुआ है। और कोण 105° है। B पर कार्य करता हुआ इस अवस्था में रखे हुये है। सिद्ध करो कि P भार के बराबर है।

पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो यदि सिरों की छड़ें क्षैतिज से 50° के कोण बनाती हैं।

२१। चित्र २ में स्वतन्त्रतापूर्वक जुड़ी हुई हल्की छड़ों का एक सममित समुदाय है जो A और B पर ऊर्ध्वाधर प्रतिक्रियाओं से रखा हुआ है, यदि D पर 10 हन्डरवेट का एक भार रखा जाय, तो छड़ों पर दबाव अथवा तनाव मालूम करो, यदि $\angle DAB = 55°$ और $\angle CAB = 35°$


Fig. 1.

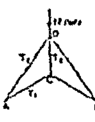


Fig. 2.

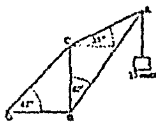


Fig. 3.

२२। एक क्रेन इस प्रकार बनी हुई है जैसा कि चित्र ३ में दिखलाया गया है, और 15 हन्डरवेट का एक भार A पर लटकाया गया है। भाग AC और AB पर कार्य करते हुये बल मालूम करो।

यदि खम्भा BC स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकता हो और BD दृढ़तापूर्वक स्थिर हो तो छड़ CD में खिंचाव मालूम करो।

२३। वेन्न गर्डर के एक भाग में तीन समत्रिबाहु त्रिभुज ABC, ADC और BCE हैं। रेखायें AB और DCL क्षैतिज हैं। DCE, AB से ऊपर है। यह A और B पर ऊर्ध्वाधर आलम्बनों पर रखा हुआ है। D और E पर क्रम से 5 और 3 टन के भार लदे हुये हैं। आलम्बनों पर प्रतिक्रियायें और चारों झुके हुये भागों पर दबाव मालूम करो।

२४। $ABCD$ चार ढीली जुड़ी हुई हल्की छड़ों का एक चतुर्भुज है, जो एक छड़ BD से कसा हुआ है। A और C पर 40 पौं॰ भार के बल कार्य करते हैं। यदि $AB=2$ फुट, $BC=3$ फुट, $CD=4$ फुट, $DA=4\frac{1}{2}$ फुट और $DB=5$ फुट, तो छड़ों का दबाव अथवा तनाव मालूम करो।

अध्याय १६

कुछ अधिक साध्य

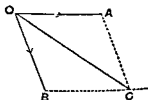
(Some Additional Propositions)

२२४—बल-समानान्तर-चर्तुभुज का लौकिक प्रमाण। यह प्रमाण दो भागों में विभाजित किया जाता है, (१) दिशा-सम्बन्धी (२) परिणामीबल के परिमाण-सम्बन्धी ।

(१) दिशा

(क) बराबर बल। मान लो बल बराबर हैं और OA और OB से प्रदर्शित होते हैं ।

समानान्तर चतुर्भुज $OACB$ को पूरा करो, और OC को मिला दो । अब OC कोण AOB को समविभाजित करेगा ।



क्योंकि बल बरावर हैं, अत. यह स्पष्ट है कि परिणामीबल उनके बीच के कोण को समविभाजित करेगा, क्योंकि कोई ऐसा कारण नही है कि परिणामीबल OC के एक ओर जितना हो उतना हो दूसरी ओर न हो । अतः जहाँ तक दिशा का सम्बन्ध है, हम मान सकते हैं कि बराबर बलों के लिये साध्य सही है।

(ख) संमेय बल। यदि साध्य जहाँ तक दिशा का सम्बन्ध है P और Q बलों के जोडों के लिये सही है और P और R के जोडों के लिये भी सही है जहाँ P और R के बीच मे वही कोण है जो P और Q के बीच में है, तो सिद्ध करना है कि यह साध्य P और $(Q+R)$ के जोडों के लिये भी सही होगी ।

मान लो बल किसी दृढ़ पिंड के एक विन्दु A पर कार्य करते हैं, और मान लो P की दिशा AB है और Q और R की दिशा ACD है।

मान लो बल P और Q के परिमाण AB और AC से प्रदर्शित किये गये हैं।

क्योंकि बल के प्रेरण के नियम से, बल R अपनी क्रिया-रेखा में किसी भी बिन्दु पर कार्य करता हुआ माना जा सकता है। मान लो वह C पर कार्य करता है और CD से प्रदर्शित होता है।

समानान्तर-चतुर्भुजों $ABEC$ और $ABFD$ को पूरा करो।

P और Q का परिणामीबल कल्पना से, AE दिशा में कार्य करते हुये किसी बल T के बराबर है। उनके स्थान पर इस परिणामीबल को रख लो और मान लो कि उनका प्रयोग-बिन्दु E पर हटा दिया गया है।

अब E पर कार्य करते हुये इस बल T के स्थान पर P और Q बलों को क्रम से CE और EF दिशा में कार्य करते हुये मान सकते हैं।

मान लो उनके प्रयोग-बिन्दु C और F पर हटा दिये गये।

अब कल्पना से C पर कार्य करते हुये P और R का परिणामीबल, CF दिशा में कार्य करते हुये किसी बल के बराबर है। इनके स्थान पर इनका परिणामीबल रख लो और उसके प्रयोग-बिन्दु को F पर हटा दो। अब क्योंकि सब बल F पर कार्य करते हैं और उनके संयुक्त प्रभाव में कोई परिवर्तन नहीं होता, अतः F उनके परिणामीबल की क्रिया-रेखा पर कोई बिन्दु होना चाहिये, इसलिये इष्ट परिणामीबल की दिशा AF है।

अतः साध्य सिद्ध हो गया।

इस साध्य का प्रयोग। हम (क) में देख चुके हैं कि साध्य उन सब बलों के लिये सही है जिनमें से प्रत्येक S के बराबर है।

अतः P, Q, और R में से प्रत्येक को S के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य S और $2S$ के लिये भी सही है और क्योंकि साध्य बल (S, S) और $(S, 2S)$ के लिये सही है, इसलिये बल $(S, 3S)$ के लिये भी सही होगा। इसी प्रकार से बल $(S, 4S)$ के लिये भी सही होगा, इत्यादि।

इस प्रकार हम देखते हैं कि साध्य बल S और mS के लिये भी सही है, जहाँ m कोई धन पूर्णांक है।

अब P को mS के बराबर और Q और R दोनों को S के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य mS और $2S$ के लिये भी सही है।

पुनः P को mS के बराबर, Q को $2S$ के बराबर और R को S के बराबर रख कर हम देखते हैं कि साध्य mS और $3S$ के लिये भी सही है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि साध्य mS और nS के लिये भी सही है, जहाँ m और n धन पूर्णांक हैं; और कोई भी दो संमेय बल सदा mS और nS से प्रदर्शित किये जा सकते हैं।

(ग) असंमेय बल। मान लो P और Q असंमेय बल हैं और मान लो AB और AC इनको प्रदर्शित करते हैं।

समानान्तर चतुर्भुज $ABDC$ को पूरा करो।

यदि P और Q का परिणामीबल AD रेखा पर न हो तो मान लो वह AE रेखा पर कार्य करता है जो CD को E पर मिलती है।

AC को किन्हीं x बराबर भागों में विभाजित करो, जिसमें से प्रत्येक ED से छोटा है, और CD में से उत्तरोत्तरतः x के बराबर भाग काटते जाओ। उप-विभाग का अन्तिम बिन्दु F, E और D के बीच में पड़ेगा क्योंकि x, ED से छोटा है।

CA के समानान्तर FG खींचो जो AB को G पर मिले और AF को मिला दो।

रेखायें AC और AG समेय बलों को प्रदर्शित करती हैं; और इसलिये (ख) से उनका परिणामीबल AF पर होगा।

अत: AC और AB का परिणामीबल कोण BAF के भीतर होगा। परन्तु परिणामीबल AE दिशा में कार्य करता है जो कोण BAF के बाहर है। परन्तु यह असम्भव है।

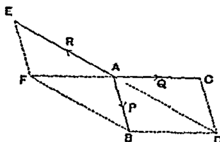
अत: AE परिणामीबल की दिशा नहीं हो सकती।

इसी प्रकार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि AD के अतिरिक्त कोई और दूसरी रेखा परिणामीबल की दिशा नहीं हो सकती।

अत: AD ही परिणामीबल की दिशा है।

(२) परिमाण

पहले की ही भाँति मान लो AB और AC बल P और Q को प्रदर्शित करती हैं। समानान्तर चतुर्भुज $ABDC$ को पूरा करो।



कोई बल R लो जो परिमाण और दिशा दोनों में ही AE से प्रदर्शित होता है और जो P और Q से समतुलित है।

प्रमाण के पहले भाग से AE उसी सरल रेखा में है जिसमें AD है। AE, AD के बराबर भी होगी।

समानान्तर-चतुर्भुज $AEFB$ को पूरा करो।

क्योंकि तीन बल P, Q और R समतुलित हैं, इसलिये, उनमें से प्रत्येक अन्य दो के परिणामीबल के बराबर और विपरीत होगा।

क्योंकि P और R का परिणामीबल AF दिशा में है ; अतः Q की दिशा, AC और AF एक ही सरल रेखा होगी।

इसलिये $ADBF$ एक समानान्तर-चतुर्भुज है, और इसलिये DA, BF के बराबर है।

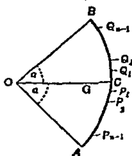
परन्तु क्योंकि $AEFB$ एक समानान्तर-चतुर्भुज है, इसलिये BF, AF के बराबर है।

इसलिये AD, AE के बराबर है, और इसलिये AD परिमाण और दिशा दोनों में ही P और Q के परिणामीबल के बराबर है।

इस प्रमाण को डूचैला का प्रमाण कहते हैं।

२२५—समवृत्तीय चाप का गुरुत्व-केन्द्र।

मान लो AB एक वृत्तीय चाप है, जो अपने केन्द्र O पर $2a$ कोण बनाती है, और मान लो OC कोण AOB को समविभाजित करता है।



मान लो AB चाप $2n$ बराबर भागों में विभाजित की गई है। C से आरम्भ करके ये उपविभाग के विन्दु A की ओर $P_1, P_2, \ , P_{n-1}$ और B की ओर $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ हैं।

इनमें से प्रत्येक विभाग-विन्दु पर, सिरों A और B पर और C पर मान लो m भार के बराबर कण रखे गये हैं।

.., मान लो दो उत्तरोत्तर कणों को मिलाने वाली चाप केन्द्र O पर β कोण बनाती है, इसलिये $2n\beta = 2a$

∵ क्योंकि कण-समुदय रेखा OC के सापेक्ष सममित है, इसलिये उनका गुरुत्व-केन्द्र, G, OC पर होगा। मान लो OG की दूरी x है। तो धारा १११ से,

$$\bar{x}=\frac{mr+2mr\text{ कोज्या }\beta+2mr\text{ कोज्या }2\beta+\ldots+2mr\text{ कोज्या }n\beta}{m+2m+2m+\ldots+2m}$$

$$=\frac{r}{2n+1}\left[1+2\text{ कोज्या }\beta+2\text{ कोज्या }2\beta+\ \ +2\text{ कोज्या }n\beta\right]$$

$$=\frac{r}{2n+1}\left[1+2\frac{\text{कोज्या }\frac{n+1}{2}\beta\text{ ज्या }\frac{n\beta}{2}}{\text{ज्या }\frac{\beta}{2}}\right],$$ [त्रिकोणमिति, धारा २४२]

त्रिकोणमितीय श्रेणी को जोड कर,

$$=\frac{r}{2n+1}\left[1+\frac{\text{ज्या }\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta-\text{ज्या }\frac{\beta}{2}}{\text{ज्या }\frac{\beta}{2}}\right]=r\cdot\frac{\text{ज्या }\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{(2n+1)\text{ ज्या }\frac{\beta}{2}}$$

$$=r\frac{\text{ज्या }\left(a+\frac{a}{2n}\right)}{(2n+1)\text{ ज्या }\frac{a}{2n}}\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad(१).$$

अब मान लो कणो की संख्या अनन्तत. बढ़ा दी जाय। क्योंकि a स्थिर रहता है, इसलिये β अनन्तत. छोटा हो जायगा। इस प्रकार हमे एक सम वृत्तीय चाप की अवस्था मिल जाती है। अत

$$(2n+1)\text{ ज्या }\frac{a}{2n}=\frac{(2n+1)}{2n}a\cdot\frac{\text{ज्या }\frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}}$$

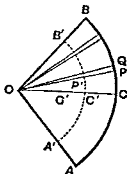
$$=\left[1+\frac{1}{2n}\right]\cdot a\ \frac{\text{ज्या }\frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}}=a,$$

जहाँ n अनन्ततः बडा है।

२२६—द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र ।

पिछली धारा के संकेतों के अनुसार मान लो P और Q द्वैत्रिज्य की वृत्तीय परिधि पर दो क्रमागत बिन्दु हैं, इसलिये PQ बहुत ही लगभग एक सरल रेखा होगी, और OPQ एक त्रिभुज होगी जिसका O बहुत ही छोटा शीर्ष कोण है।

OP पर ऐसा P' लो कि $OP'=\frac{2}{3}OP$। चूंकि PQ बहुत छोटा है, अतः P' ही त्रिभुज OPQ का गुरुत्व-केन्द्र होगा।



AB चाप पर अनन्त क्रमागत बिन्दुओं को O से मिलाने पर द्वैत्रिज्य अनन्त संख्या के त्रिभुजों में विभाजित हो जायगा, जिनमें से प्रत्येक का गुरुत्व-केन्द्र बिन्दीदार वृत्त-चाप पर जिसकी त्रिज्या $\frac{2}{3}r$ है, पड़ेगा।

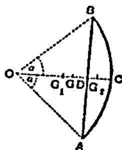
अतः द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र वही है जो वृत्त चाप $A'C'B'$ का है, इसलिये पिछली धारा से

$$OG^1=OC'\frac{\text{ज्या}\, a}{a}=\frac{2}{3}r\frac{\text{ज्या}\, a}{a}.$$

उपसाध्य। यदि द्वैत्रिज्य अर्द्ध-वृत्त है, तो $a=\frac{\pi}{2}$, और OG' की दूरी$=\frac{4r}{3\pi}$।

२२७—वृत्तांश का गुरुत्व-केन्द्र ।

किसी वृत्त का वृत्तांश ACB, द्वैत्रिज्य $OACB$ और त्रिभुज OAB के अन्तर का होता है।



पिछली दो धाराओं के ही संकेतों के अनुसार मान लो G_1 और G_2 क्रम से त्रिभुज AOB और वृत्तांश ACB के गुरुत्व-केन्द्र हैं। मान लो G द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र है, और AB, OC को D पर मिलती हैं।

अत. एक समवृत्तीय चाप में, (१)

$$\bar{x}=r\frac{\text{ज्या } a}{a}\,*$$

हो जाता है ।

उपसाध्य । अर्द्ध-वृत्तीय चाप में $a=\frac{\pi}{2}$, इसलिये केन्द्र से गुरुत्व-केन्द्र की दूरी

$$=r\frac{\text{ज्या}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2r}{\pi}\text{ ।}$$

---

*जो विद्यार्थी चलराशिकलन से परिचित हैं वह इस परिणाम को इस प्रकार बड़ी आसानी से मालूम कर सकता है :

मान लो P चाप पर कोई ऐसा विन्दु है कि $\angle POC=\theta$, और P' उसके बहुत ही निकट एक अन्य ऐसा विन्दु है कि $\angle P'OP=\delta\theta$.

यदि पूरे चाप का द्रव्यमान M है तो PP' भाग का द्रव्यमान $\frac{\delta\theta}{2a}\cdot M$ और विन्दु P का भुज r कोज्या θ होगा । अतः धारा १११ से

$$\bar{x}=\frac{\int_{-a}^{+a}\frac{\delta\theta}{2a}M.r\text{ कोज्या }\theta}{\int_{-a}^{+a}\frac{\delta\theta}{2a}\cdot M}=r\frac{\int_{-a}^{+a}\text{कोज्या }\theta d\theta}{\int_{-a}^{+a}d\theta}$$

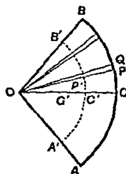
$$=r\frac{\left[\text{ज्या }\theta\right]_{-a}^{+a}}{\left[\theta\right]_{-a}^{+a}}=r\frac{\text{ज्या }a}{a}.$$

सममित् से यह भी स्पष्ट है कि गुरुत्व-केन्द्र OC पर होगा ।

२२६—द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र ।

पिछली धारा के संकेतों के अनुसार मान लो P और Q द्वैत्रिज्य की वृत्तीय परिधि पर दो क्रमागत बिन्दु हैं, इसलिये PQ बहुत ही लगभग एक सरल रेखा होगी, और OPQ एक त्रिभुज होगी जिसका O बहुत ही छोटा शीर्ष कोण है।

OP पर ऐसा P' लो कि $OP'=\frac{2}{3}OP$। चूंकि PQ बहुत छोटा है, अतः P' ही त्रिभुज OPQ का गुरुत्व-केन्द्र होगा।



AB चाप पर अनन्त क्रमागत बिन्दुओं को O से मिलाने पर द्वैत्रिज्य अनन्त संख्या के त्रिभुजों में विभाजित हो जायगा, जिनमें से प्रत्येक का गुरुत्व-केन्द्र बिन्दीदार वृत्त-चाप पर जिसकी त्रिज्या $\frac{2}{3}r$ है, पड़ेगा।

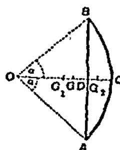
अतः द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र वही है जो वृत्त चाप $A'C'B'$ का है, इसलिये पिछली धारा से

$$OG^1=OC'\frac{\text{ज्या}\,a}{a}=\frac{2}{3}r\frac{\text{ज्या}\,a}{a}.$$

उपसाध्य। यदि द्वैत्रिज्य अर्द्ध-वृत्त है, तो $a=\frac{\pi}{2}$, और OG' की दूरी$=\frac{4r}{3\pi}$।

२२७—वृत्तांश का गुरुत्व-केन्द्र ।

किसी वृत्त का वृत्तांश ACB, द्वैत्रिज्य $OACB$ और त्रिभुज OAB के अन्तर का होता है।



पिछली दो धाराओं के ही संकेतों के अनुसार मान लो G_1 और G_2 क्रम से त्रिभुज AOB और वृत्तांश ACB के गुरुत्व-केन्द्र हैं। मान लो G द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र है, और AB, OC को D पर मिलती है।

धारा १०९ में, $OG = \frac{\triangle AOB \times OG_1 + \text{वृत्तांश} ACB \times OG_2}{\triangle AOB + \text{वृत्तांश} ACB}$....(१).

परन्तु $OG_1 = \frac{2}{3} OD = \frac{2}{3} r$ कोज्या a, $OG = \frac{2}{3} r \frac{\text{ज्या}\, a}{a}$.

और $\triangle AOB = \frac{1}{2} r^2$ ज्या $2a$,

और वृत्तांश ABC = द्वैत्रिज्य $AOB - \triangle AOB = \frac{1}{2} r^2 2a - \frac{1}{2} r^2$ ज्या $2a$.

अतः समीकरण (१) में

$$\frac{2}{3} r \frac{\text{ज्या}\, a}{a} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \text{ ज्या } 2a \times \frac{2}{3} r \text{ कोज्या } a + \frac{1}{2} r^2 (2a - \text{ज्या } 2a) \times OG_2}{\frac{1}{2} r^2 . 2a}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} r \text{ कोज्या } a \text{ ज्या } 2a + OG_2 (2a - \text{ज्या } 2a)}{2a};$$

$\therefore \frac{4}{3} r$ ज्या $a - \frac{2}{3} r$ कोज्या a ज्या $2a = OG_2$ $(2a -$ ज्या $2a)$;

$$\therefore OG_2 = \frac{4}{3} r \frac{\text{ज्या} a - \text{कोज्या}^2 a \text{ ज्या} a}{2a - \text{ज्या} 2a} = \frac{4}{3} r \frac{\text{ज्या}^3 a}{2a - \text{ज्या} 2a} \text{ ।}$$

२२८—गोले के कटिबन्ध का गुरुत्व-केन्द्र ।

सिद्ध करना कि गोले के किसी कटिबन्ध के पृष्ठ का गुरुत्व-केन्द्र उसके समतल सिरों के बीचोबीच रहता है ।

[कटिबन्ध गोले का वह भाग है जो दो समानान्तर धरातलों के बीच में पड़ता हो ।]

मान लो $ABCD$ कटिबन्ध का वह परिच्छेद है जो गोले के केन्द्र से समतल सिरों पर लम्ब खींचे गये धरातल से बना है ।

कागज के धरातल में मान लो कि ROR' वह व्यास है जो समतल सिरों के समानान्तर है । इसके सिरों पर RU और $R'U'$ स्पर्श-रेखायें खींचो और मान लो AB और CD इन्हें a, b, c और d बिन्दुओं पर मिलती हैं ।

उस चित्र पर विचार करो जो ऊपर के चित्र को EOE' के चारों ओर घुमाने से बनता है । चाप AD कटिबन्ध और रेखा ad परिवेलन के भाग को बनायेगा ।

हम सिद्ध करेंगे कि धरातल ab और cd के बीच पड़ने वाले कटिबन्ध और बेलन के भागों के क्षेत्रफल बराबर हैं।

A और D के बीच चाप पर कोई बिन्दु P लो और P के अत्यन्त निकट कोई दूसरा बिन्दु Q लो। $pPMP'p'$ और $qQNQ'q'$ रेखायें OE पर लम्ब लो जैसा चित्र में दिखलाया गया है।

मान लो PQ, $E'E$ को T पर मिलती है और PM पर QS लम्ब खींचो।

चूँकि Q चाप पर P का निकटतम बिन्दु है, अतः स्पर्श-रेखा की परिभाषा के अनुसार P पर रेखा PQ स्पर्श-रेखा होगी और इसलिये OPT एक समकोण होगा। जब R और Q एक दूसरे के बहुत ही निकट हैं तो सीमा में PQ से खींचा गया क्षेत्रफल, जो वास्तव में $2\pi MP.PQ$ और $2\pi NQ.PQ$ के बीच में है, इनमें से किसी एक के बराबर होगा। इसलिये

$$\frac{\text{कटिबन्ध का छोटा भाग}}{\text{बेलन का छोटा भाग}}=\frac{PQ \text{ से खींचा गया क्षेत्रफल}}{pq \text{ से खींचा गया क्षेत्रफल}}=\frac{2\pi.MP.PQ}{2\pi.Mp.pq}$$

$$=\frac{MP}{Mp}\cdot\frac{PQ}{SQ}=\frac{MP}{Mp}\cdot\frac{1}{\text{कोज्या } SQP}=\frac{MP}{Mp}\cdot\frac{1}{\text{कोज्या } OTP}$$

$$=\frac{MP}{Mp}\cdot\frac{1}{\text{ज्या } MOP}=\frac{MP}{Mp}\cdot\frac{OP}{MP}=\frac{OP}{Mp}=1.$$

इसलिये इन दो अत्यन्त निकट भागो से कटे हुये कटिबन्ध और वेलन के भाग वही हैं और इसलिये उनके गुरुत्व-केन्द्र भी वही हैं ।

अब यदि हम AB से आरम्भ करके CD तक अनन्त संख्या में कटिबन्ध और वेलन के पतले पतले परिच्छेद लें तो संगत परिच्छेदों के वही द्रव्यमान और वही गुरुत्व-केन्द्र होंगे ।

इसलिये कटिबन्ध और वेलन के गुरुत्व-केन्द्र वही हैं और वेलन का गुरुत्व-केन्द्र स्पष्टत. LL' का मध्य-बिन्दु है ।

अतः गोले के किसी कटिबन्ध का गुरुत्व-केन्द्र उसके समतल सिरों के बीचोबीच होता है ।*

२२९—खोखले शून्य अर्द्धगोले का गुरुत्व-केन्द्र ।

मान लो AB गोले के केन्द्र से जाती है और इसलिये RR' पर पड़ती है और मान लो D और C हटकर E पर पहुँच जाते हैं अतः सीमान्त-पृष्ठ DC, E पर एक बिन्दु मात्र रह जाता है ।

---

*चलराशिकलन द्वारा । मान लो $\angle AOE=\alpha$, $\angle DOE=\beta$, $\angle POE=\theta$. P पर छोटे भाग का क्षेत्रफल $=a\delta\theta\times 2\pi a$ ज्या θ, और P का भुज $=a$ कोज्या θ. अत. धारा १११ मे,

$$\bar{x}=\frac{\int_{\beta}^{\alpha}2\pi a^2 \text{ ज्या } \theta\delta\theta . a \text{ कोज्या } \theta}{\int_{\beta}^{\alpha}2\pi a^2 \text{ ज्या } \theta\delta\theta}=a\frac{\int_{\beta}^{\alpha}\text{ज्या } \theta \text{ कोज्या } \theta d\theta}{\int_{\beta}^{\alpha}\text{ज्या } \theta d\theta}$$

$$=a\frac{\left[\frac{1}{2}\text{ज्या}^2\theta\right]_{\beta}^{\alpha}}{\left[-\text{कोज्या}\theta\right]_{\beta}^{\alpha}}=\frac{a}{2}\frac{\text{ज्या}^2\alpha-\text{ज्या}^2\beta}{\text{कोज्या }\beta-\text{कोज्या }\alpha}$$

$$=\frac{a}{2}\frac{\text{कोज्या}^2\beta-\text{कोज्या}^2\alpha}{\text{कोज्या }\beta-\text{कोज्या }\alpha}=\frac{a}{2}\left(\text{कोज्या }\beta+\text{कोज्या }\alpha\right)$$

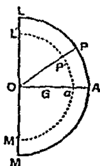
$$=\frac{1}{2}\left[OL+OL'\right].$$

इस प्रकार कटिबन्ध अर्द्ध गोला $RDECR'$ हो जाता है और इसलिये उसका गुरुत्व-केन्द्र OE के मध्य-बिन्दु पर पड़ता है अर्थात् यह अर्द्ध-गोले के समतल आधार पर खींची गई गोले की त्रिज्या को समविभाजित करता है।

२३०—ठोस अर्द्ध गोले का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करना।

मान लो कागज़ के धरातल द्वारा बना हुआ LAM अर्द्धगोले का परिच्छद है और मान लो OL अर्द्धगोले की वह त्रिज्या है जो उसके समतल आधार पर लम्ब है।

अर्द्धगोले पर कोई बिन्दु P लो और P पर पृष्ठ का अत्यन्त छोटा भाग लो। उस पतले सूची-स्तम्भ का गुरुत्व-केन्द्र जिसका आधार यह छोटा सा भाग है और शीर्ष O है, OP पर ऐसा P' बिन्दु होगा कि $OP'=\frac{3}{4}\,OP$ (धारा १०७)। इसलिये इस पतले सूची-स्तम्भ का भार P पर लगा हुआ समझा जा सकता है।



मान लो अर्द्धगोले का वाह्य-पृष्ठ बहुत से छोटे छोटे भागों में विभाजित किया गया है और सगत सूची-स्तम्भ खींचे गये हैं। इन सबके गुरुत्व-केन्द्र अर्द्धगोले $L'P'aM'$ पर, जिसका केन्द्र O और त्रिज्या $Oa\ (=\frac{3}{4}OA)$ है, पड़ेंगे।

अतः ठोस अर्द्धगोले का गुरुत्व-केन्द्र वही होगा जो अर्द्धगोलीय कवच $L'P'aM'$ का है, अर्थात् वह G पर होगा जहाँ पर $OG=\frac{1}{2}Oa=\frac{3}{8}OA.$*

---

*चलराशिकलन द्वारा। मान लो AL चाप पर P कोई बिन्दु है। OA पर PN लम्ब खींचो और मान लो $ON=x,\ NP=y$; तो स्पष्टतः $x^2+y^2=a^2$, जहाँ a अर्द्धगोले की त्रिज्या है।

PN और $x+\delta x$ की दूरी पर खींचे गये धरातल के बीच के आयतन का छोटा भाग $\pi y^2\delta x$ है, और P का भुज x है।

२३१—इसी प्रकार हम गोले के द्वैत्रिज्य का गुरुत्व-केन्द्र भी मालूम कर सकते हैं जो वृत्त के द्वैत्रिज्य को घुमाने से बनता है, जैसा धारा २२८ के चित्र में चित्र $OAQEBO$ भाग $OAQE$ को त्रिज्या OE के चारों ओर घुमाने से बना है।

O से इसके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी $\frac{3}{8}$ $(OL+OE)$ होगी।

२३२—ऊपर के प्रमाणों में कुछ बातें ऐसी हैं जो पूर्णतया संतोषजनक नहीं हैं। इनकी ठीक ठीक प्रमाणसिद्धि के लिये कलन की आवश्यकता पड़ती है।

२३३—**काल्पनिक कर्म।** यदि किसी पिंड पर कार्य करता हुआ एक बल-समुदाय सततुलित हो और यदि हम यह कल्पना करें कि पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाता है जो समुदाय के ज्यामितीय नियमों के अनुकूल है, और पिंड का कोई विन्दु Q, इस काल्पनिक स्थानान्तर के अनुसार Q' पर हट जाता है, तो QQ' को Q का काल्पनिक वेग अथवा स्थानान्तर कहते हैं।

शब्द 'काल्पनिक' से तात्पर्य यह है कि स्थानान्तर वास्तविक न हो कर अनुमानित है।

२३४—यदि पिंड के किसी बिन्दु Q पर कोई बल R कार्य करता है और Q का काल्पनिक स्थानान्तर QQ' है और यदि $Q'N$, Q से R की क्रिया-रेखा पर लम्ब है, तो गुणनफल $R.QN$ को बल R का काल्पनिक

अत. धारा १११ से,

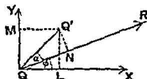
$$\bar{x}=\frac{\int_0^a \pi y^2\delta x.x}{\int_0^a \pi y^2\delta x}=\frac{\int_0^a x(a^2-x^2)\delta x}{\int_0^a (a^2-x^2)\delta x}=\frac{\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}$$

$$=\frac{\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}}{a^3-\frac{a^3}{3}}=\frac{3}{8}a$$

कर्म अथवा काल्पनिक घूर्ण कहते हैं। धारा १२७ की भाँति QN, के R की दिशा अथवा उसकी विपरीत दिशा में होने के अनुसार यह कर्म घन अथवा ऋण होता है।

२३५—किसी बल का काल्पनिक कर्म उसके अवयव बलों के काल्पनिक कर्मों का योग होता है।

मान लो R के दो लम्ब दिशाओं मे अवयव बल X और Y हैं, और R, X की दिशा से कोण ϕ बनाता है, तो



$X = R$ कोज्या ϕ, और $Y = R$ ज्या ϕ.

मान लो R का प्रयोग-विन्दु Q काल्पनिक स्थानान्तर के कारण हटकर Q' हो जाता है। R पर $Q'N$ लम्ब खींचो मान लो $\angle NQQ' = a$.

X और Y के काल्पनिक कर्मों का योग

$= X.QL + Y.QM$

$= R$ कोज्या $\phi . QQ'$ कोज्या $(\phi + a)$ $+ R$ ज्या ϕ QQ' ज्या $(\phi + a)$

$= R.QQ'$ [कोज्या ϕ कोज्या $(\phi + a) +$ ज्या ϕ ज्या $(\phi + a)$]

$= R.QQ'$ कोज्या a

$= R.QN$

$= R$ का काल्पनिक कर्म।

२३६—काल्पनिक कर्म का सिद्धान्त बतलाता है कि यदि किसी पिंड पर कार्य करता हुआ कोई बल-समुदाय समतुलित हो, और पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाय जो समुदाय के ज्यामितीय नियमों के अनुकूल हो, तो काल्पनिक कर्मों का बीजीय योग शून्य होता है; और विलोमतः यदि यह बीजीय योग शून्य हो तो बल समतुलित होंगे; अर्थात् यदि प्रत्येक बल R में उसकी क्रिया-रेखा की दिशा में काल्पनिक स्थानान्तर r है, तो $\Sigma\ (R.r) = O$; और विलोमतः यदि $\Sigma\ (R.r) = O$, तो बल समतुलित होंगे।

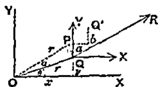
अगली धारा में समतलीय बलों के लिये हम इस नियम का प्रमाण देंगे।

२३७—किसी समतलीत बल-समुदाय के लिये काल्पनिक नियम का प्रमाण।

बलों के धरातल में कोई दो लम्ब सरल रेखायें लो और मान लो कि पिंड में थोड़ा सा स्थानान्तर हो जाता है। यह पिंड को O के चारो ओर किसी छोटे से कोण α रेडियन से घुमा कर और फिर अक्षो के समानान्तर a और b दूरी हटा कर किया जा सकता है।

[विद्यार्थी किसी पुस्तक को मेज पर एक स्थान से दूसरे स्थान तक हटा कर इस बात को देख सकता है, यदि पुस्तक एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाने में बराबर मेज को स्पर्श करती रहे।]

मान लो Q किसी बल R का प्रयोग-बिन्दु है जिसके O के मापेक्ष निर्देशाक x और y है, और जिसके कोणीय निर्देशांक r और θ हैं, इसलिये $x=r$ कोज्या θ और $y=r$ ज्या θ, जहाँ पर $OQ=r$ और $XOQ=\theta$.



जब Q के स्थान में थोड़ा सा स्थानान्तर हो गया हो तो Q के नये स्थान Q' के निर्देशाक

$$r \text{ कोज्या } (\theta+\alpha)+a \text{ और } r \text{ ज्या } (\theta+\alpha)+b,$$

अर्थात् r कोज्या θ कोज्या $\alpha-r$ ज्या θ ज्या $\alpha+a$

और r ज्या θ कोज्या $\alpha+r$ कोज्या θ ज्या $\alpha+b$,

अर्थात्, r कोज्या $\theta-\alpha\, r$ ज्या $\theta+a$ और r ज्या $\theta+\alpha . r$ कोज्या $\theta+b$ हैं, क्योकि α बहुत छोटा है।

इसलिये Q के निर्देशांको में अन्तर

$a-\alpha . r$ ज्या θ और $b+\alpha . r$ कोज्या θ,

अर्थात् $a-\alpha y$ और $b+\alpha x$ हैं।

यदि अब R के अवयव बल X और Y हैं, तो R का काल्पनिक कर्म, जो X और Y के काल्पनिक कर्मों के योग के बराबर है,

$$X(a-\alpha y)+Y(b+\alpha x),$$

अर्थात् $a.X+b.Y+\alpha(Yx-Xy)$ है।

इसी प्रकार हम समुदाय के किसी अन्य बल का काल्पनिक कर्म भी मालूम कर सकते हैं, जहाँ $a, b,$ और α प्रत्येक बल के लिये वही है।

इसलिये काल्पनिक बलों का योग शून्य होगा यदि

$a\Sigma(X)+b\Sigma(Y)+\alpha\Sigma(Yx-Xy)$ शून्य हो।

यदि बल समतुलित हैं तो $\Sigma(X)$ और $\Sigma(Y)$ क्रम से OX और OY अक्षों पर अवयव बलों के जोड़ हैं, और इसलिये, धारा ८३ से, वे पृथक पृथक शून्य हैं।

और $Yx-Xy$=मूलबिन्दु O पर X और Y के घूर्णो का योग $=O$ पर R का घूर्ण। (धारा ६२)

अतः $\Sigma(Yx-Xy)=O$ पर सब बलों के घूर्णो का योग और धारा ८३ से, यह योग भी शून्य है।

अतः यदि बल समतुलित हैं तो उनके काल्पनिक कर्मों का योग शून्य होगा।

२३८—विलोमतः, यदि किसी स्थानान्तर के लिये काल्पनिक कर्मों का योग शून्य है तो बल समतुलित होंगे।

पिछली धारा के संकेत से, काल्पनिक कर्मों का योग

$$a\Sigma(X)+b\Sigma(Y)+\alpha\Sigma(Yx-Xy) \quad \ldots \quad \ldots \quad (१)$$

है, और वह सब स्थानान्तरों के लिये शून्य है।

ऐसा स्थानान्तर लो जिसमें पिंड x के अक्ष के समानान्तर केवल a दूरी हटे। इस स्थानान्तर के लिये b और α शून्य हो जाते हैं, और (१) से $a\Sigma(X)=O$, इसलिये $\Sigma(X)=O$, अर्थात् OX के समानान्तर अवयव बलों का योग शून्य है।

इसी प्रकार यदि y के अक्ष के समानान्तर स्थानान्तर लें तो OY के समानान्तर अवयव बलों का योग भी शून्य होगा।

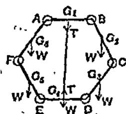
अन्त में, मान लो कि स्थानान्तर केवल मूलबिन्दु O के चारों ओर घूमने के कारण है, तो a और b शून्य होंगे और (१) से $\Sigma(Yx-Xy)=O$, इसलिये O पर बलों के घूर्णो का योग भी शून्य होगा।

इसलिये धारा ८३ के समतुलन के तीनों नियम सन्तुष्ट हो जाते हैं और इसलिये बल-समुदाय समतुलित रहता है।

२३९—काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त के प्रयोग के उदाहरणस्वरूप हम निम्नलिखित प्रश्न करेंगे।

छः बराबर दंड AB, BC, CD, DE, EF और EA, जिनमें से प्रत्येक का भार W है, अपने सिरों पर इस प्रकार स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं कि उनसे एक षट्भुज बनता है। दंड AB क्षैतिज अवस्था में नियत है और AB और DE के मध्य-बिन्दु एक डोरी से बँधे हुये हैं। सिद्ध करो कि उसका तनाव $3W$ है।

मान लो G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 और G_6 दंडों के मध्य-बिन्दु हैं। क्योंकि सममिति से BC और CD ऊर्ध्वाधर से बराबर कोण बनाती हैं, इसलिये बिन्दु C, G_3 और D की AB से गहराई G_2 की गहराई की क्रम से 2,3, और 4 गुनी है।



मान लो समुदाय में, ऊर्ध्वाधर धरातल में इस प्रकार स्थानान्तर हो कि D और E सदा B और A से खींची गई ऊर्ध्वाधर रेखाओं के ठीक नीचे रहते हैं और DE सदा क्षैतिज रहती है।

यदि G_2 ऊर्ध्वाधरतः x दूरी नीचे उतर आता है, तो G_3, $3x$ दूरी नीचे, G_4, $4x$ दूरी नीचे, और G_5 और G_6 क्रम से $3x$ और x दूरी नीचे उतर आयेंगे।

भारों के द्वारा किये हुये काल्पनिक कर्मों का योग।

$$=W.x+W.3x+W.4x+W.3x+W.x$$
$$=12W.x.$$

यदि डोरी का तनाव T है, तो तनाव का काल्पनिक कर्म $T\times(-4x)$ है।

क्योंकि G_4 का स्थानान्तर T की क्रिया-रेखा के विपरीत है इसलिये उसका काल्पनिक कर्म ऋण होगा।

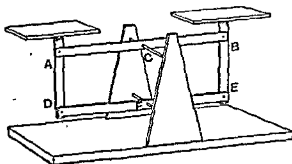
अतः काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से

$$12W.x+T(-4x)=O,$$

अर्थात् $$T=3W.$$

२४०—रोबरवेल की तुला। इस तुला में जो चिट्ठियाँ तोलने वाली तुला के रूप की होती है, चार दंड AB, BE, ED और DA होते हैं, जो A,B,E और D कोनों पर समानान्तर-चतुर्भुज बनाते हुये स्वतंत्रतापूर्वक जुडे होते हैं और AB और ED के मध्य-बिन्दु C और E एक ऊर्ध्वाधर रेखा में नियत बिन्दु C और F पर होते हैं। दंड AB और DE, C और F के चारों ओर वे रोकटोक घूम सकते हैं।

AD और BE दंडों पर पलड़े लगे होते हैं। एक पलड़े में पदार्थ W रखा होता है जिसे तौलना होता है और दूसरे में प्रतितुलित करता हुआ भार P रखा जाता है।



हम काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त को यह सिद्ध करने के लिये प्रयोग करेंगे कि यह बात बिल्कुल अनावश्यक है कि चाहें भार P और W पलड़ों के किसी भी भाग में क्यों न रखे जायें।

क्योंकि $CBEF$ और $CADF$ समानान्तर-चतुर्भुज हैं, अतः तुला को किसी भी कोण से क्यों न घुमाया जाय, छड़ें BE और AD हमेशा CF के समानान्तर होंगी और इसलिये हमेशा ऊर्ध्वाधर रहेंगी।

यदि छड AB को किसी छोटे कोण से घुमायें तो बिन्दु B उतना ही ऊँचा उठेगा जितना नीचा बिन्दु A आयेगा। इसलिये छड़ BE उतनी ही ऊँची उठती है जितनी नीची AD उतरती है, और दायाँ पलड़ा उतना ही ऊँचा

उठता है जितना नीचा बायाँ पलड़ा उतरता है। ऐसे स्थानान्तर में छड़ BE और उसके पलड़े के भारों का काल्पनिक कर्म, छड़ AD और उसके पलड़े के भारो के काल्पनिक कर्म के बराबर और विपरीत होना है। इसलिये काल्पनिक कर्म के समीकरण में यह काल्पनिक कर्म एक दूसरे को नष्ट कर देते हैं।

यदि दायें पलड़े का स्थानान्तर ऊपर की ओर p है तो बायें पलड़े का स्थानान्तर नीचे की ओर p होगा।

इसलिये काल्पनिक कर्म के समीकरण से

$$P.p+W(-p)=O,$$

अर्थात्

$$P=W.$$

अतः यदि तुला किसी भी अवस्था में समतुलित हो, तो भार P और W बराबर होते हैं, और यह पलड़ों में भारों के स्थानों पर निर्भर नही रहता। इसलिये पलडों में भारो का कोई भी स्थान हो सकता है।

अतएव जब तक पलड़ों के भार बराबर है तब तक यह आवश्यक नही है कि उनका रूप एक सा ही हो, और न यह ही आवश्यक है कि वे तुला में एक ही प्रकार से लगाये जायें।

उदाहरणार्थ, ऊपर के चित्र में कोई भी एक पलड़ा CF से विपरीत दिशा के स्थान पर उसकी ओर इंगित कर सकता है पर दूसरे के स्थान में किसी परिवर्तन की आवश्यकता नहीं पडेगी।

उदाहरणमाला ३६

१। चार बराबर भारी सम दंड एक समचतुर्भुज बनाते हुये स्वतन्त्रता-पूर्वक जुड़े हुये हैं और वे एक शीर्ष-विन्दु से लटके हुये हैं। ऊपर के दो दंडों के मध्य-विन्दु एक हल्के दंड द्वारा इस प्रकार सम्बद्ध है कि समचतुर्भुज सिकुड़ न जाय। सिद्ध करो कि इस हल्के दड में तनाव $4W$ स्पज्या α है, जहां W प्रत्येक दंड का भार है और 2α समचतुर्भुज का लटकते हुये विन्दु पर कोण है।

२। एक डोरी, जिसकी लम्बाई a है, उस सम चतुर्भुज का छोटा विकर्ण बनाती है जो कब्जों द्वारा जुड़े हुये चार समदडों से बना हुआ है, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई b और भार W है। यदि दंडों में से कोई एक क्षैतिज अवस्था मे रुका हुआ है तो सिद्ध करो कि डोरी का तनाव

$$\frac{2W(2b^2-a^2)}{b\sqrt{4b^2-a^2}} \text{ होगा।}$$

३। एक सम षट्भुज $ABCDEF$ छ. बराबर दंडों से बना है जिनमें से प्रत्येक का भार W है और जो एक दूसरे से स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं। षट्भुज ऊर्ध्वाधर धरातल मे है और AB एक क्षैतिज मेज़ को स्पर्श करती है। यदि C और F एक हल्की डोरी से सम्बद्ध हों, तो सिद्ध करो कि उसका तनाव $W\sqrt{3}$ होगा।

४। एक तिपाई में तीन बराबर सम दड लगे हैं, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई a और भार w है और जो एक सिरे पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं। इनके मध्य-बिन्दु डोरियो से जिनकी लम्बाई b है मिलाये गये हैं। तिपाई इस प्रकार रखी हुई है कि उसके पाये एक चिकने क्षैतिज धरातल पर है और एक भार W उसके उभयनिष्ठ जोड़ पर लटका हुआ है। सिद्ध करो कि प्रत्येक डोरी का तनाव

$$\tfrac{2}{3}(2W+3w)\frac{b}{\sqrt{9a^2-12b^2}} \text{ है।}$$

५। चार जुड़े हुये सम भारी दंडों से, जिनमें से प्रत्येक का भार W है, बना हुआ एक वर्गाकार ढांचा एक कोने से लटका हुआ है। उसके नीचे के तीनों कोनों से बराबर भार W लटके हुये है, और वर्ग का रूप उसके क्षैतिज विकर्ण पर एक हल्का दंड लगा कर रक्षित किया जाता है। सिद्ध करो कि दंड का तनाव $4W$ है।

६। चार बराबर दंड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई a है एक समचतुर्भुज $ABCD$ बनाते हुये एक दूसरे से जुड़े हुये हैं और कोण B और D एक डोरी से जिनकी लम्बाई l है मिलाये गये हैं। समुदाय

इस प्रकार एक ऊर्ध्वाधर धरातल में रखा हुआ है कि A एक क्षैतिज मेज पर है और AC ऊर्ध्वाधर है। सिद्ध करो कि डोरी का तनाव

$$2W\frac{l}{\sqrt{4a^2-l^2}}$$

है, जहाँ प्रत्येक दंड का भार W है।

७। एक भारी स्थिति-स्थापक तार, जिसकी प्राकृतिक लम्बाई $2\pi a$ है, एक चिकने शंकु के चारों ओर रखा हुआ है। शंकु का अक्ष ऊर्ध्वाधर है और उसका अर्द्ध-शीर्ष कोण a है। यदि W तार का भार और λ उसका स्थिति-स्थापन-मापक, है तो सिद्ध करो कि वह समतुलित अवस्था में होगा जब वह एक वृत्त के आकार में है जिसकी त्रिज्या

$$a\left(1+\frac{W}{2\pi\lambda}\text{कोस्पज्या}\ \right) \text{ है।}$$

८। AB और AC दो बराबर सम दंड, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई $2b$ है, A पर स्वतन्त्रतापूर्वक जुड़े हुये हैं और वे एक चिकने वृत्त पर जिसकी त्रिज्या a है रखे हुये हैं। काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से सिद्ध करो कि, यदि उनके बीच का कोण 2θ है, तो b ज्या$^3\theta = a$ कोज्या θ।

९। पृष्ठ ३३८ के उदाहरण १३ को काल्पनिक कर्म के सिद्धान्त से हल करो।

सरल विविध उदाहरणमाला

१। 13 पौं० और 14 पौं० भार के उन दो बलो का परिणामीबल मालूम करो जिनके बीच के अधिक-कोण की ज्या $\frac{12}{13}$ है।

२। 100 पौं० भार के बल को दो बराबर बलो मे, जिनके बीच का कोण 60° है, विश्लिष्ट करो।

३। *ABCD* एक वर्ग है। 1 पौ०, 6 पौ० और 9 पौं० भार के बल क्रमशः *AB*, *AC*, और *AD* दिशाओं में कार्य करते हैं। उनके परिणामीबल का परिमाण दशमलव के दो अकों तक शुद्ध मालूम करो।

४। दो बलों का, जो एक दूसरे से 120° के कोण पर कार्य करते हैं, परिणामीबल छोटे अवयव बल पर लम्ब है। बड़ा अवयव बल 100 पौं० भार के बराबर है। दूसरा अवयव बल और परिणामीबल मालूम करो।

५। चतुर्भुज *ABCD* के विकर्ण *AC* और *BD* के मध्य-बिन्दु *E* और *F* हैं। यदि *EF* का मध्य-बिन्दु *G* है, तो सिद्ध करो कि चार बल जो *AG*, *BG*, *CG* और *DG* से परिमाण और दिशाओं में प्रदर्शित होते हैं, समतुलित हैं।

६। 12 फुट लम्बा एक सख्त डंडा एक ऊर्ध्वाधर दीवार से क्षैतिज दिशा में निकला हुआ है। यदि 28 पौं० का एक भार उसके सिरे पर लटका दिया जाय तो वह टूट जायगा। बताओ डंडे पर कितनी दूर तक एक लड़का, जिसका भार 8 स्टोन है, लटक सकता है।

७। एक दंड जिसका भार 4 औं० है और जिसकी लम्बाई एक गज है मेज़ पर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी एक तिहाई लम्बाई मेज के किनारे से बाहर निकली रहती है। वह बड़े से बड़ा भार मालूम करो जो एक डोरी द्वारा दंड के सिरे से लटकाया जाय कि दंड गिरने न पाये।

८। एक सम कड़ी, जिसका भार 30 पौ० है, का नीचे का सिरा भूमि पर रखा हुआ है, और ऊपर का सिरा एक क्षैतिज डोरी द्वारा, जो एक छोटी घिरनी पर से जाती है, एक भार से बँधा हुआ है। यदि ऊर्ध्वाधर से कड़ी का झुकाव 60° है, तो सिद्ध करो कि नीचे

के सिरे पर दवाव लगभग 40 पौं० भार है और डोरी से लगभग 26 पौ० भार बँधा हुआ है।

९। उन समानान्तर वलों का केन्द्र मालूम करो जो क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 और 6 पौं० भार के वरावर हैं, और जिनके प्रयोग-विन्दु AB पर A से क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 और 6 इंच हैं।

१०। त्रिभुज ABC का कोण B समकोण है। AB की लम्बाई 8 इंच और BC की लम्बाई 11 इंच है। A, B और C पर कण रक्खे हुये हैं जिनके भार क्रम से 4, 5 और 6 हैं। A से उनके गुरुत्व-केन्द्र की दूरी मालूम करो।

११। एक समत्रिवाहु त्रिभुज की भुजा AB पर C के विपरीत ओर एक आयत खींचा गया है जिसकी ऊँचाई AB की आधी है। सिद्ध करो कि कुल चित्र का गुरुत्व-केन्द्र AB का मध्य-विन्दु है।

१२। एक सम पट्भुज में से एक समत्रिवाहु त्रिभुज जिसका शीर्ष षट्भुज के केन्द्र पर है और जिसका आधार उसकी एक भुजा है, काट लिया गया है। शेष का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो।

१३। 6 पेनियों का एक ढेर एक क्षैतिज मेज़ पर इस प्रकार रखा हुआ है कि प्रत्येक पेनी अपने नीचे की पेनी से वरावर दूरी बाहर निकली हुई है। सबसे नीचे और सबसे ऊपर की पेनी के केन्द्रों के बीच की बड़ी से बडी क्षैतिज दूरी मालूम करो।

१४। जब दो भार एक सीधे लीवर के सिरों से समतुलित अवस्था में लटकाये जाते हैं तो आलम्ब पर दवाव 20 पौं० भार होता है। यदि लीवर की लम्बाई 12 इंच है और उसके सिरो से आलम्ब की दूरियों की निष्पत्ति 3:2 है, तो भार मालूम करो।

१५। एक सीधे लीवर के एक सिरे पर उसका आलम्ब है। लीवर की लम्बाई 5 फुट और भार 10 पौ० है। आलम्ब से 1 फुट और 3 फुट दूरी पर 3 और 6 पौं० के भार लटकायें गये हैं। उसके दूसरे सिरे पर कार्य करता हुआ एक बल उसे क्षैतिज अवस्था में रखता है। आलम्ब पर दवाव मालूम करो।

१६। पाँच पर घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें प्रत्येक घिरनी पृथक पृथक डोरी से लटकी हुई है, सामर्थ्य P और भार W के बीच का सम्बन्ध मालूम करो, जहाँ प्रत्येक घिरनी का भार P है।

१७। 5 हल्की घिरनियों की उस श्रेणी में जिसमें प्रत्येक डोरी एक बिना भार के दंड से जिससे भार लटका हुआ है, बँधी हुई है, यदि डोरियाँ उत्तरोत्तर एक एक इंच की दूरी पर हों, तो बताओ दंड के किस बिन्दु से भार लटकाना चाहिये कि वह क्षैतिज अवस्था में रहे।

१८। 5 पौ० भार का एक पिंड एक चिकने धरातल पर जिसका क्षैतिज से झुकाव 30° है, रखा हुआ है, और उसपर 2 पौ० भार का एक बल धरातल के समानान्तर ऊपर की ओर और P पौ० भार का एक बल धरातल से 30° का कोण बनाता हुआ कार्य करता है। P का मान मालूम करो यदि पिंड समतुलित अवस्था में हो।

१९। यदि एक सही तुला का एक पलड़ा हटा दिया जाय और दूसरे पलड़े में कोई भार न रखा जाय, तो सिद्ध करो कि तुला के दंड का क्षैतिज से झुकाव स्पज्या$^{-1}\dfrac{Sa}{W'k+Sh}$ होगा, जहाँ पर $2a$ दंड की लम्बाई है, h और k क्रमश: अवलम्बन-बिन्दु से दंड और तुला के गुरुत्व-केन्द्र की दूरियां हैं, और S और W' क्रमसे पलड़े और शेष तुला के भार हैं।

२०। यदि साधारण विषम-भुज तुला के दंड के गुरुत्व-केन्द्र की आलम्ब से, दूरी 2 इंच है, सरकनेवाला भार 4 औ० है, और दंड का भार 2 पौं० है, तो गुरुत्व-केन्द्र से अंशांकित शून्य चिन्ह की दूरी मालूम करो। यदि आलम्ब और उस सिरे को बीच की दूरी जिसमें पलड़ा लटका हुआ है, 4 इंच है, तो उत्तरोत्तर अंशांकित बिन्दुओं की दूरी भी मालूम करो।

२१। यदि किसी पेच (स्क्रू) की परिधि 20 इंच और दो उत्तरोत्तर चूड़ियों के बीच की दूरी ·75 इंच है, तो उसका यांत्रिक लाभ मालूम करो।

२२। एक रूक्ष धरातल की ऊँचाई की आधार से 3:4 की निष्पत्ति है, और उसपर एक पिंड उसके आधे भार के बराबर एक क्षैतिज

बल से ठीक रुका हुआ है। पिंड और धरातल के बीच का घर्षण-गुणक मालूम करो।

२३। 30 फुट लम्बी सीढ़ी का एक सिरा एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर और दूसरा रूक्ष भूमि पर जिसका घर्षण-गुणक $\frac{1}{2}$ है, रखा हुआ है। बताओ एक आदमी जिसका भार सीढ़ी के भार से चौगुना है, सीढ़ी पर कितना ऊँचा चढ़ सकता है कि सीढ़ी न फिसलने पाये, यदि सीढ़ी का पद दीवार से 6 फुट दूर हो।

२४। एक बेलनाकार सुरंग खड़िया मिट्टी में होकर, जिसका घनत्व पानी के घनत्व से 2.3 गुना है, 100 फ़दम की गहराई तक खोदी जानी है। सुरंग का व्यास 10 फुट है। उस इंजन की अश्व-सामर्थ्य क्या होगी जो सामान को आठ आठ घण्टों के 12 दिनों में उठा सकता है।

**कठिन विविध उदाहरणमाला

१। यदि O त्रिभुज ABC के परिवृत्त का केन्द्र है, और OA, OB और OC पर क्रमशः BC, CA, और AB के अनुपात में बल लगाये गये हों तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल अन्तः-वृत्त के केन्द्र से जायेगा।

२। तीन बल क्रमानुसार त्रिभुज ABC की भुजाओं पर लगाये गये हैं, और उनका परिणामीबल त्रिभुज के लाम्बिक-केन्द्र और गुरुत्व-केन्द्र से जाता है, तो सिद्ध करो कि बल

ज्या $2A$ ज्या $(B-C)$: ज्या $2B$ ज्या $(C-A)$: ज्या $2C$ ज्या $(A-B)$

के अनुपात में होंगे। यह भी सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल परिवृत्त और अन्तः-वृत्त के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर कार्य करेगा यदि बल

कोज्या B—कोज्या C : कोज्या C—कोज्या A : कोज्या A—कोज्या B

के अनुपात में हों।

३। तीन बल PA, PB और PC एक बिन्दु P से अपसृत होते हैं और तीन अन्य बल AQ, BQ और CQ एक बिन्दु Q पर संसृत होते हैं।

सिद्ध करो कि इन छः बलों का परिणामीबल परिमाण और दिशा में $3PQ$ से प्रदर्शित होता है और वह त्रिभुज ABC के गुरुत्व-केन्द्र से जाता है।

४। त्रिभुज ABC का T लाम्बिक-केन्द्र और O परिकेन्द्र हैं। सिद्ध करो कि तीन बल AT, BT और CT का परिणामीबल OT के दुगने से प्रदर्शित होता है।

५। एक त्रिभुज के बाह्य-वृत्तों के केन्द्रो पर रखे हुये तीन कणो का गुरुत्व-केन्द्र मालूम करो, यदि वे कण इन वृत्तो की त्रिज्याओं के व्युत्क्रमानुपाती हैं।

६। $ABCD$ एक आयत है। AD मे एक विन्दु P इस प्रकार लो कि जब त्रिभुज PDC काट दिया जाय और शेष समलम्ब $ABCP$, P से लटकाया जाय तो उसकी भुजायें AP और BC क्षैतिज रहे।

७। एक त्रिभुजीय पटल ABC, जिसका कोण C अधिक-कोण है, एक मेज़ पर इस प्रकार खड़ा है कि उसकी भुजा AC मेज़ को स्पर्श करती है। सिद्ध करो, यदि त्रिभुज का भार W है, तो B से लटकाया गया वह लघुतम भार जो त्रिभुज को उलट देता है

$$\frac{1}{3}W\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$$

है। इस परिणाम की व्याख्या करो यदि $c^2>a^2+3b^2$.

८। ताश की एक गड्डी मेज़ पर इस प्रकार रखी हुई है कि प्रत्येक पत्ता अपने नीचे के पत्ते से गड्डी की लम्बाई की दिशा मे बाहर निकला हुआ है। यदि प्रत्येक पत्ता इतना बाहर निकला है जितना वह अधिक से अधिक निकल सकता है, तो सिद्ध करो कि उत्तरोत्तर पत्तों के सिरो के बीच की दूरियाँ हरात्मक श्रेणी में होंगी।

९। यदि aA, bB, cC,...n बलों को प्रदर्शित करते हैं, जिनके प्रयोग-विन्दु a, b, c, . और सिरे A, B, C,...हैं, तो सिद्ध करो कि उनका परिणामीबल परिमाण और दिशा में $n\,gG$ है, जहाँ पर g, n बराबर

कणों a, b, c,...का, और G, n बराबर कणों A, B, C,...का जड़त्व-केन्द्र है।

यदि g और G एक हो जायें तो क्या होगा ?

१०। एक पिंड से जिसका भार W है, w भार का एक भाग काट कर x दूरी पर हटा दिया गया है। सिद्ध करो कि सम्पूर्ण पिंड के गुरूत्वकेन्द्र के दोनो स्थानो को मिलाने वाली रेखा हटाये हुये भाग के गुरुत्व-केन्द्र के दोनों स्थानों को मिलाने वाली रेखा के समानान्तर है।

११। एक ही पदार्थ के दो समदंड AB और AC, A पर दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। कोण $BAC=60°$, और AB की लम्बाई AC की लम्बाई से दुगनी है। यदि G दंडों का जड़त्व-केन्द्र है, तो सिद्ध करो कि $BG=AC\sqrt{\frac{19}{12}}$,। यदि दंड बिना रोकटोक के AB के सिरे B से लटका दिये जायें, तो सिद्ध करो कि A पर क्रिया दंडों के भार W के एक तिहाई भार के बराबर ऊर्ध्वाधर बल और $\frac{1}{3}W\frac{AC}{\sqrt{19}}$ घूर्ण के एक बलयुग्म के बराबर होगी।

१२। यदि एक फाटक के कब्जों के बीच की दूरी 4 फुट फाटक की चौड़ाई 10 फुट और उसका भार 500 पौं० है, तो यह मान कर कि फाटक का सारा भार नीचे के कब्जे पर है सिद्ध करो कि ऊपर के कब्जे पर दबाव 625 पौं० भार के बराबर है।

१३। एक सीढी जिसका आकार अक्षर A का है, और जिसकी प्रत्येक टाँग ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाती है, एक क्षैतिज फ़र्श पर रखी हुई है, और उसे उसकी टाँगों के मध्य-विन्दुओ को मिलाने वाली डोरी थामे हुये है। यदि घर्षण कहीं भी न हो तो सिद्ध करो कि यदि उसकी एक टाँग पर फ़र्श से उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{n}$ ऊँचाई पर भार W रख दिया जाय, तो डोरी के तनाव में $\frac{1}{n}W$ स्पज्या α वृद्धि होगी।

१४। एक बेलन, जिसकी त्रिज्या r और अक्ष क्षैतिज अवस्था

में नियत है, एक ऊर्ध्वाधर दीवार को अपनी एक जनकरेखा पर स्पर्श करता है। एक चपटी समछड़ जिसकी लम्बाई $2l$ और भार W है, का एक सिरा, दीवार पर और दूसरा सिरा बेलन पर रखा हुआ है। यदि छड़ ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाती है, तो सिद्ध करो कि, यदि घर्षण न हो, तो $\frac{l}{r}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}}$, दीवार पर दबाव $\frac{1}{2}W$ और बेलन पर प्रतिबल $\frac{1}{2}\sqrt{5}W$ होगा।

१५। एक सम दंड, जिसकी लम्बाई $32a$ है, त्रिज्या a के एक चिकने बेलनाकार प्याले के भीतर इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका कुछ भाग प्याले के भीतर और कुछ बाहर है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड क्षैतिज से 60° का कोण बनाता है, और यह भी सिद्ध करो कि बेलन लुढ़क जायगा यदि उसका भार दंड के भार से कम से कम छः गुना न हो।

१६। एक प्याला, जिसका अन्तः पृष्ठ गोलाकार है, एक अक्ष के चारों ओर, जिसकी गोले के केन्द्र से गहराई c और प्याले के गुरुत्व-केन्द्र से ऊँचाई a है, बेरोक टोक घूम सकता है। प्याले के पेंदे में एक भारी गेंद रखी हुई है। सिद्ध करो कि यदि गेंद का भार प्याले के भार के $\frac{a}{c}$ से बढ़ जाय तो प्याला उलट जायगा।

१७। एक बन्द पतला अर्ध-गोलीय कवच, जिसका आधार समतल है, पानी से भरा हुआ है। यदि, उसे आधार के किनारे के किसी बिन्दु से लटकाया जाय तो उसका आधार ऊर्ध्वाधर से कोण α बनाता है। सिद्ध करो कि पानी और कवच के भारों में निष्पत्ति स्पज्या $\alpha-\frac{1}{3}:\frac{3}{4}-$स्पज्या α है।

१८। पतली धातु का बना हुआ एक खोखला बेलन, जिसकी त्रिज्या a है और जो दोनों सिरों पर खुला हुआ है, एक चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा हुआ है। उसके भीतर दो चिकने गोले, जिनकी त्रिज्या r है, एक दूसरे के ऊपर रखे हुये हैं, $2r>a$ और $<2a$। यदि बेलन का भार W और एक

गोले का भार W' है, तो सिद्ध करो कि बेलन विना लुढ़के सीधा खड़ा रहेगा, यदि

$$W a = 2W'(a-r).$$

१९। एक समद्विबाहु त्रिभुजीय पटल, जिसका धरातल ऊर्ध्वाधर है, दो चिकनी खूंटियों के बीच में जो एक ही क्षैतिज रेखा में हैं, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका शीर्ष नीचे की ओर है। सिद्ध करो कि वह समतुलित अवस्था में होगा यदि उसका आधार ऊर्ध्वाधर में कोण ज्या$^{-1}$(कोज्या$^2 \alpha$) बनाये, जहाँ पटल का शीर्ष-कोण 2α और आधार की लम्बाई खूंटियों की दूरी की तिगुनी है।

२०। एक समपार्श्व, जिसका अनुप्रस्थ-परिच्छेद एक समत्रिबाहु त्रिभुज है, दो चिकने धरातलों पर जो क्षैतिज में α और β कोण बनाते हैं, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसकी दो कोरें क्षैतिज हैं। यदि इन कोरों से खींचा गया धरातल ऊर्ध्वाधर में θ कोण बनाता है, तो सिद्ध करो

$$\text{स्पज्या}\,\theta = \frac{2\sqrt{3}\,\text{ज्या}\,\alpha\,\text{ज्या}\,\beta + \text{ज्या}\,(\alpha+\beta)}{\sqrt{3}\,\text{ज्या}\,(\alpha-\beta)}.$$

२१। एक समत्रिबाहु त्रिभुज के आकार के एक पतले तख्ते के आधार का एक चौथाई भाग एक क्षैतिज मेज के किनारे पर रखा है, तख्ते का भार 1 पौं० है और उसे गिरने से एक डोरी रोके हुये है जो उसके शीर्ष और मेज के एक विन्दु से जो त्रिभुज के ऊर्ध्वाधर धरातल में है, बँधी हुई है। यदि डोरी की लम्बाई त्रिभुज के आधार से उसके शीर्ष की दूरी से दुगनी हो तो उसका तनाव मालूम करो।

२२। एक ठोस शंकु, जिसकी ऊँचाई h और अर्द्ध शीर्ष-कोण α है, का आधार एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से टिका हुआ है। उसके शीर्ष और दीवार के एक विन्दु से बँधी हुई एक डोरी उसे सम्हाले हुये है। सिद्ध करो कि डोरी की महत्तम लम्बाई $h\sqrt{1+\frac{16}{9}\text{स्पज्या}^2\alpha}$ है।

२३। एक शंकु की ऊँचाई h और त्रिज्या r है। एक डोरी जो उसके शीर्ष और वृत्ताकार आधार की परिधि के एक विन्दु से

बँधी हुई हैं, एक चिकनी खूँटी पर लटकी हुई हैं। सिद्ध करो कि यदि शंकु का अक्ष क्षैतिज है, तो डोरी की लम्बाई $\sqrt{h^2+4r^2}$ होनी चाहिये।

२४। एक चिकने धरातल पर तीन बराबर चिकने गोले एक दूसरे को स्पर्श करते हुये रखे हैं। बिना छोर की एक डोरी जो उनके केन्द्रों के धरातल में है, उन्हें एक दूसरे से अलग नहीं होने देती है। यदि एक चौथा गोला उनके ऊपर रखा जाय, तो सिद्ध करो कि डोरी के तनाव की प्रत्येक गोले के भार से निष्पत्ति $1:3\sqrt{6}$ है।

२५। एक चिकने दंड की लम्बाई $2a$ है, और उसका एक सिरा एक धरातल पर जिसका क्षैतिज से α झुकाव है, रखा हुआ है। वह एक क्षैतिज पटरी द्वारा, जो धरातल के समानान्तर और c दूरी पर है, रुका हुआ है। सिद्ध करो कि दंड का आनत तल से झुकाव θ समीकरण c ज्या $\alpha = a$ ज्या$^2\theta$ कोज्या $(\theta-\alpha)$ से दिया जाता है।

२६। एक वर्गाकार तख्ता दीवार के सहारे एक डोरी से जो उसके ऊपर के किनारे के दो सिरों से बँधी हुई है और एक पूर्णतया चिकनी खूँटी पर से जाती है, चपटा लटका हुआ है। यदि डोरी की लम्बाई तख्ते के विकर्ण से छोटी है तो सिद्ध करो कि समतुलन की तीन अवस्थायें हो सकती हैं।

२७। एक अर्द्धगोलीय प्याला, जिसकी त्रिज्या r है, एक चिकनी क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है और उसके भीतर एक छड़, जिसकी लम्बाई $2l$ है और जिसका भार प्याले के भार के बराबर है, इस प्रकार रखी हुई है कि उसका कुछ भाग प्याले के भीतर और कुछ बाहर है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था समीकरण

$$l \text{ ज्या } (\alpha+\beta) = r \text{ ज्या } \alpha = -2r \text{ कोज्या } (\alpha+2\beta)$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ पर α अर्द्धगोले के आधार का क्षैतिज से झुकाव है, और 2β वह कोण है जो छड़ का प्याले के भीतर का भाग गोले पर केन्द्र बनाता है।

२८। एक सम दंड, जिसका भार W है दीवार में दो खूँटियों से दो ऊर्ध्वाधर डोरियों द्वारा, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई l है, और जो उसके

सिरो से बँधी हुई है, क्षैतिज अवस्था में लटका हुआ है। एक चिकना बिना भार का टंक, जिसका शीर्ष कोण 30° है, डोरियों को बिना स्पर्श किये ऊर्ध्वाधर बल $\frac{W}{2}$ से नीचे की ओर दीवार और दंड के बीच में दबाया जा रहा है। टंक की नीचे की कोर क्षैतिज है और उसका एक फलक दीवार को स्पर्श करता है। दीवार से वह दूरी मालूम करो जो दंड ढकेला गया है।

२९। AB एक चिकना धरातल है जो क्षैतिज से a कोण बनाता है, और उसके नीचे के सिरे A पर एक कब्जा लगा है जिससे, बिना घर्षण के, $2a$ लम्बाई का एक भारी चिकना तख्ता AC लगा हुआ है। धरातल और तख्ते के बीच एक चिकना बेलन जिसकी त्रिज्या r है, रखा हुआ है। बेलन ऊपर से तख्ते के दबाव के कारण धरातल के नीचे फिसलने से रुका हुआ है। यदि तख्ते का भार W, बेलन का भार W', और तख्ते और धरातल के बीच का कोण θ है, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{W'r}{Wa} = \text{कोज्या } (\alpha+\theta)\frac{1-\text{कोज्या }\theta}{\text{ज्या }\alpha}।$$

३०। दो चिकने किनारों के बराबर वृत्ताकार मंडल, जिनकी त्रिज्याये r हैं, अपने चपटे फलकों पर दो चिकने ऊर्ध्वाधर धरातलो के कोने में जो एक दूसरे से कोण 2α बनाते हैं, इस प्रकार रखे हुये हैं कि वे दोनों धरातल के बीच के कोण को समविभाजित करने वाली रेखा पर एक दूसरे को स्पर्श करते हैं; सिद्ध करो कि उस लघुतम मंडल की त्रिज्या जो उन दोनो के बीच में उनको बिना अलग किये हुये दबाई जा सकती है r (व्युकोज्या $\alpha-1$) होगी।

३१। $ABCD$ चार बिना भारकी स्वतन्त्रतापूर्वक जुडी हुई छडो से बना हुआ एक आयताकार ढाँचा है, जिनमें से छड़ AD ऊर्ध्वाधर अवस्था में नियत है। ऊपर की छड AB के एक दिये हुये विन्दु P पर एक भार रखा हुआ है और ढाँचा AC डोरी से आयताकार रखा जाता है। डोरी का तनाव मालूम

करो और सिद्ध करो कि इस तनाव में कोई परिवर्तन नहीं होगा यदि यही भार नीचे की छड़ पर अपने पहले स्थान के ठीक ऊर्ध्वाधर नीचे रखा जाय।

३२। एक सम दंड MN के सिरे दो नियत सीधी रूक्ष नलियों OA और OB में, जो एक ही ऊर्ध्वाधर धरातल में हैं और जो क्षैतिज से कोण α और β बनाती हैं, रखे हुये हैं। सिद्ध करो जब सिरा M दिशा AO की ओर फिसलने की अवस्था में है, तो क्षैतिज से MN के झुकाव की स्पर्शज्या $\frac{\text{ज्या}\,(\alpha-\beta-2\epsilon)}{2\,\text{ज्या}\,(\beta+\epsilon)\,\text{ज्या}\,(\alpha-\epsilon)}$ है, जहाँ पर ϵ घर्षण-कोण है।

३३। एक रूक्ष आनत धरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव घर्षण-कोण λ से अधिक है, रखा हुआ एक दंड अपने एक सिरे के चारों ओर, जो धरातल से लगा हुआ है, स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकता है। सिद्ध करो कि समतुलित अवस्था में दंड का महत्तम ढाल-रेखा से अधिक से अधिक झुकाव ज्या$^{-1}$ (स्पज्या λ कोस्पज्या α) हो सकता है।

३४। दो बराबर सम दंड, जिनकी लम्बाई $2a$ है, एक सिरे पर एक कब्जे द्वारा जुड़े हुये हैं, और सममित रूप से एक रूक्ष नियत गोले पर जिसकी त्रिज्या c है रखे हुये हैं। समतुलन की सीमान्त अवस्था मालूम करो और सिद्ध करो, यदि घर्षण-गुणक $\frac{c}{a}$ है तो प्रत्येक दंड का ऊर्ध्वाधर से सीमान्त झुकाव स्पज्या$^{-1}$ $\sqrt[3]{c \div a}$ है।

३५। एक सीधा समदंड, जिसकी लम्बाई $2c$ है, क्षैतिज अवस्था में एक खोखले रूक्ष गोले के भीतर, जिसकी त्रिज्या a है, यथा-सम्भव ऊँचे से ऊँचा रखा हुआ है। सिद्ध करो कि दंड के मध्य-बिन्दु को गोले के केन्द्र से मिलाने वाली रेखा ऊर्ध्वाधर से स्पज्या$^{-1}$ $\frac{\mu a}{\sqrt{a^2-c^2}}$ कोण बनाती है।

३६। एक रूक्ष दंड क्षैतिज अवस्था में नियत है और एक दूसरा दंड जिसका एक सिरा एक नियत बिन्दु से एक कब्जे द्वारा लगा हुआ है, समतुलित

अवस्था में नियत दड पर रखा हुआ है। यदि नियत विन्दु से नियत दड पर डाले गये लम्ब की लम्बाई b है और लम्ब क्षैतिज से a कोण बनाता है, तो सिद्ध करो कि उस विन्दु तक नियत दंड का भाग जिस पर सरकने वाला दड ठहरता है,

$$\frac{2\mu b \text{ कोज्या } a}{\sqrt{\text{ज्या}^2 a - \mu^2 \text{कोज्या}^2 a}}$$

है, जहां पर μ घर्षण-गुणक है।

३७। एक कांच का दंड, कुछ तो एक बेलनाकार प्याले के भीतर और कुछ बाहर रखा हुआ समतुलित अवस्था में है। दंड का नीचे का सिरा प्याले के ऊर्ध्वाधर पहलू के किनारे पर रखा है। यदि a और β वे बड़े से बड़े और छोटे से छोटे कोण हैं जो दंड ऊर्ध्वाधर से बना सकता है, तो सिद्ध करो कि घर्षण-कोण

$$\tfrac{1}{2} \text{ स्पज्या}^{-1} \frac{\text{ज्या}^3 a - \text{ज्या}^3 \beta}{\text{ज्या}^2 a \text{ कोज्या } a + \text{ज्या}^2 \beta \text{ कोज्या } \beta} \text{ है।}$$

३८। एक दड कुछ तो एक आयताकार समानान्तर षट्फलक के आकार के सन्दूक के भीतर और कुछ बाहर रखा हुआ है। दड अपने एक सिरे से सन्दूक के रूक्ष ऊर्ध्वाधर पहलू को दबाता हुआ तथा सम्मुख के चिकने किनारे को स्पर्श करता हुआ रखा हुआ है। सन्दूक का भार दंड के भार का चौगुना है। सिद्ध करो. यदि दंड फिसलने की अवस्था में है और उसी समय सन्दूक भी लुढकने को है, तो दंड ऊर्ध्वाधर से कोण

$$\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2} \text{ कोज्या}^{-1} (\tfrac{1}{3} \text{ कोज्या } \lambda)$$

बनायेगा, जहां पर λ घर्षण-कोण है।

३९। एक भारी सम दड एक रूक्ष क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है। दड के किसी बिन्दु से डोरी बांधकर दंड को अपनी लम्बाई की लम्ब दिशा में खींचा जाता है। बताओ दड किस बिन्दु के चारो ओर घूमना आरम्भ करेगा।

यह भी सिद्ध करो कि उन बलों में जो दड के मध्यबिन्दु और सिरे पर

उसकी लम्ब दिशा में लगा कर उसे फिसला सकते हैं, $\sqrt{2}+1:1$ निष्पत्ति है।

४०। एक हल्के दड के मध्य बिन्दु से बराबर दूरी c पर दो बराबर भारी कण लगे हुये हैं और बराबर दूरी a पर दो डोरियाँ बँधी हुई हैं। दड अब एक रूक्ष क्षैतिज मेज़ पर रखा जाता है और डोरियों को दड की लम्ब दिशा में ऊर्ध्वाधर से दड के विपरीत ओर वही कोण θ बनाते हुये खीचा जाता है। वह लघुतम दबाव मालूम करो जो दंड को घुमा सकता है और सिद्ध करो, यदि घर्षण-गुणक $\frac{a}{c}$ है, तो दबाव उस समय लघुतम होगा जब $\theta=45°$।

४१। दो बराबर समरूप पिंड A और B जिनमें से प्रत्येक का भार W है, एक हल्की डोरी से बँधे हुये एक रूक्ष क्षैतिज धरातल पर रखे हुये हैं और घर्षण-गुणक μ है। एक बल P, जो $2\mu W$ से कम है, A पर BA दिशा में लगाया गया है, और उसकी दिशा धीरे धीरे क्षैतिज धरातल में θ कोण से घुमाई जाती है। सिद्ध करो, यदि P, $\sqrt{2}\,\mu W$ से बड़ा है, तो दोनो भार फिसलेंगे जब कोज्या $\theta=\frac{P}{2\mu W}$; परन्तु यदि P, $\sqrt{2}\mu W$ से कम और μW से बड़ा है तो केवल A फिसलेगा जब ज्या $\theta=\frac{\mu W}{P}$।

४२। एक रूक्ष सम छड AB दो अन्य छड़ों पर विन्दु A और C पर क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है। सिद्ध करो कि B पर BA की लम्ब दिशा में कार्य करता हुआ लघुतम क्षैतिज बल जो छड़ को फिसला सकता है, $\frac{1}{2}\mu W$ और $\mu W\frac{b-a}{2a-b}$ में से छोटा बल है, जहाँ $AB=2a$, $AC=b$, W छड़ का भार और μ घर्षण-गुणक है।

४३। एक रूक्ष सम छड़ AB, जिसकी लम्बाई $2a$ है, दो बराबर और समान रूक्ष गेंदों पर क्षैतिज अवस्था में, उन्हें C और D पर

स्पर्श करता हुआ, रखा हुआ है। गेंदों के केन्द्रों की दूरी b है। सिद्ध करो यदि b, $\frac{4a}{3}$ से अधिक न हो तो छड़ की एक ऐसी अवस्था मालूम की जा सकती है जिसमे B पर छड़ की लम्ब दिशा मे लगा हुआ एक बल P उसे C और D दोनों पर एक ही समय फिसलने की सीमा पर कर देगा।

४४। एक भारी सम छड दो विभिन्न रूक्षता के नियत धरातलों के बीच में, जो क्षैतिज से नियत कोण बनाते हैं, धरातलों के लम्ब एक ऊर्ध्वाधर धरातल में, क्षैतिज अवस्था में रखी हुई है। वह प्रतिबन्ध मालूम करो छड़ समतुलित हो जाय।

४५। एक सम दंड सीमान्त समतुलित अवस्था में है। उसका एक सिरा रूक्ष क्षैतिज धरातल पर और दूसरा एक उतने ही रूक्ष आनत धरातल पर है जिसका क्षैतिज से झुकाव α है। यदि घर्षण-कोण λ है और दंड एक ऊर्ध्वाधर धरातल मे है तो सिद्ध करो क्षैतिज से दंड का झुकाव θ,

$$\text{स्पज्या}\ \theta = \frac{\text{ज्या}\ (\alpha-2\lambda)}{2\ \text{ज्या}\ \lambda\ \text{ज्या}\ (\alpha-\lambda)}$$

द्वारा दिया जाता है।

४६। यदि एक परकार एक चिकने क्षैतिज वेलन पर, जिसकी त्रिज्या c है, आड़ी रखी हुई है, तो सिद्ध करो कि जोड़ पर घर्षणीय बलयुग्म जो परकार की भुजाओं को फिसलने से रोकता है

$$W\ (c\ \text{कोस्पज्या}\ \alpha\ \text{व्युज्या}\ \alpha - a\ \text{ज्या}\ \alpha)$$

होना चाहिये, जहाँ W परकार की प्रत्येक भुजा का भार 2α उनके बीच का कोण और a किसी भुजा के गुरुत्व-केन्द्र की जोड से दूरी है।

४७। मेज की किश्ती के दस्ते किश्ती के पहलुओं से बराबर दूरी पर हैं, और उनके बीच की दूरी c है। सिद्ध करो कि किश्ती का एक दस्ते से खीचना असम्भव है जवतक कि किश्ती की पीछे से सामने तक की लम्बाई μc से अधिक न हो।

४८। यदि खिड़की के शीशे के चौखटे की पट्टी की एक डोरी टूट

जाय तो चौखटे और पट्टी के बीच का लघुतम घर्षण-गुणक मालूम करो यदि दूसरा भार फिर भी खिड़की को सम्हाल सके।

४९। एक वृत्ताकार छल्ला, जिसकी त्रिज्या एक फुट है, एक क्षैतिज दंड पर लटका हुआ है, और एक आदमी छल्ले से एक हाथ से लटकता है। यदि छल्ले और दंड के बीच का घर्षण-गुणक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है, तो छल्ले के भार को नगण्य मान कर आदमी के हाथ से दंड की कम से कम सम्भव दूरी मालूम करो।

५०। एक वर्ग, जिसकी भुजा $2a$, और धरातल ऊर्ध्वाधर है, दो चिकनी खूँटियों के बीच में, जो एक ही क्षैतिज रेखा में है, और जिनके बीच की दूरी c है, रखा हुआ है। सिद्ध करो कि वह समतुलित रहेगा यदि उसकी एक भुजा का क्षैतिज से झुकाव 45° अथवा $\frac{1}{2}$ ज्या$^{-1}\frac{a^2-c^2}{c^2}$ हो।

५१। तीन बराबर वृत्ताकार मंडल A, B और C, एक चिकने क्षैतिज धरातल पर एक दूसरे को स्पर्श करते हुये रखे हुये हैं, और इसके अतिरिक्त B और C एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार को भी स्पर्श करते हैं। यदि मंडलों की परिधियों के बीच के और मंडलों और दीवार के बीच के घर्षण-गुणक $2-\sqrt{3}$ हैं, तो सिद्ध करो जब A को दीवार की ओर दीवार को लम्ब दिशा में किसी बल P से ठेला जाय तो उसमें कोई गति नहीं होगी।

५२। यदि एक चक्र और धुरी का गुरुत्व-केन्द्र धुरी से a दूर हो, तो सिद्ध करो चक्र समतुलित रहेगा जब उसका धरातल धुरी और गुरुत्व-केन्द्र से जाते हुए ऊर्ध्वाधर मे θ से कम कोण बनावे, जहाँ ज्या $\theta=\frac{b}{a}$ ज्या ϕ, b धुरी की त्रिज्या और ϕ घर्षण-कोण है।

५३। एक कण जिसका भार w है, एक रूक्ष आनत धरातल पर जिसका भार W और झुकाव α है, रखा हुआ है। आनत धरातल का

आधार एक रूक्ष मेज पर है और दोनों के लिये घर्षण गुणक एक ही है। यदि धीरे धीरे बढ़ता हुआ बल कण w पर धरातल के पृष्ठ पर लगाया जाय, तो बताओ क्या कण धरातल के मेज से फिसलने से पहले धरातल के ऊपर की ओर सरकेगा ?

५४। एक रूक्ष बेलन, जिसका भार W' है, एक धरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव α है, इस प्रकार रखा हुआ है कि उसका अक्ष क्षैतिज है और एक आदमी, जिसका भार W है और शरीर ऊर्ध्वाधर है बेलन के ऊपर खड़ा होकर उसे समतुलित रखता है। यदि उसके पाँव A पर हैं और A से खींचा हुआ बेलन का ऊर्ध्वाधर परिच्छेद धरातल को B पर स्पर्श करता है, तो यदि घर्षण फिसलना रोकने के लिये पर्याप्त हो तो सिद्ध करो कि कोण θ, जो परिच्छेद के केन्द्र पर AB से बनता है, समीकरण

$$W \text{ ज्या } (\theta+\alpha)=(W+W') \text{ ज्या } \alpha$$

द्वारा दिया जाता है।

५५। दो रूक्ष सम गोले, जिनकी त्रिज्यायें बराबर हैं परन्तु भार W_1 और W_2 हैं, एक गोलाकार प्याले के भीतर रखे हुये हैं। उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है और प्याले के केन्द्र पर कोण 2α बनाती हैं। सिद्ध करो उनके बीच का घर्षण-गुणक

$$\frac{W_1-W_2}{W_1+W_2} \text{ स्पज्या } \left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

से कम नहीं है।

५६। दो बिना भार के दृढ़ दंड इस प्रकार जुड़े हुये हैं कि वे एक दूसरे पर लम्ब हैं। उनके जोड़ पर एक भार लगाया गया है और वे दो रूक्ष खूँटियों पर जो एक ही क्षैतिज धरातल में हैं और जिनके घर्षण-गुणक μ और μ' हैं, रखे हुये हैं। सिद्ध करो कि वे समतुलित अवस्था से किसी भी ओर कोण $\frac{1}{2}$ स्पज्या$^{-1}$ $\frac{\mu+\mu'}{2}$ बिना फिसले घुमाये जा सकते हैं।

५७। एक गोला जिसका भार W है, एक रूक्ष धरातल पर जिसका

क्षैतिज से भुकाव α है जो घर्षण-कोण से कम है, रखा हुआ है। सिद्ध करो गोले पर धरातल के समानान्तर व्यास के ऊपरी सिरे पर लगा हुआ भार $W \cdot \frac{\text{ज्या}\,\alpha}{\text{कोज्या}\,\alpha - \text{ज्या}\,\alpha}$ गोले को धरातल के नीचे की ओर लुढ़कने से ठीक रोक सकेगा।

इस भार को थोड़ा सा कम करने अथवा बढ़ाने से क्या प्रभाव पड़ेगा ?

५८। दो बराबर समदंड अपने एक सिरे पर V बनाते हुये दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। उनके शीर्ष पर कोण 2α है, और वे एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर वृत्त पर आड़े रखे हुये हैं। वृत्त की त्रिज्या इतनी बड़ी है कि V का गुरुत्व-केन्द्र वृत्त की परिधि पर है और घर्षण-कोण ϵ है। यदि V ठीक फिसलने की सीमा पर हो जब उसके शीर्ष और वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है, तो सिद्ध करो कि ज्या $\epsilon = \sqrt{\text{ज्या}\,\alpha}$।

यदि दंड दृढ़ता से जुड़े होने की जगह कब्जों द्वारा जुड़े हुये हों और उनके स्वतन्त्र सिरे एक डोरी से मिला दिये जायँ, तो सिद्ध करो कि मिलाने वाली डोरी वृत्त को नहीं मिलेगी यदि ज्या $\alpha < \frac{1}{3}$। यदि यह प्रतिबन्ध सन्तुष्ट किया जाता हो, तो सिद्ध करो कि यदि V ठीक फिसलने की सीमा पर हो, जब उसके शीर्ष और वृत्त के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा क्षैतिज है, तो डोरी का तनाव

$$\frac{W}{2}\sqrt{1+\text{व्युज्या}\,\alpha}$$

होगा, जहां पर W प्रत्येक दंड का भार है।

५९। एक आयताकार ऊर्ध्वाधर छड, जिसका भार W है, मार्ग-दर्शकों से केवल अपनी ही दिशा में सरकने को नियन्त्रित है, और उसका नीचे का सिरा एक चिकने फ़र्श पर रखा हुआ है। यदि दिये हुये ढाल का एक चिकना आनत धरातल पीछे लगाये हुये एक क्षैतिज बल से उसके नीचे ठेला जाय, तो वाञ्छित बल का परिमाण मालूम करो।

यदि घर्षण केवल फ़र्श और आनत धरातल के बीच में हो और

अन्य स्थानों पर न हो, तो μ का लघुतम मान मालूम करो यदि अनत धरातल छड के नीचे किसी दी हुई अवस्था में छोड़ दिये जाने पर बिना बाहर निकले रह सके।

६०। एक वृत्ताकार मंडल, जिसका भार W और त्रिज्या a है, तीन बराबर ऊर्ध्वाधर डोरियों से, जिनकी लम्बाइयाँ b हैं और जो उसकी परिधि पर बराबर दूरी पर बँधी हुई हैं, क्षैतिज अवस्था में लटका हुआ है। सिद्ध करो कि उस क्षैतिज बलयुग्म का परिमाण जो इसे θ कोण मोड़े रख सकता है,

$$Wa^2 \frac{\text{ज्या}\,\theta}{\sqrt{b^2-4a^2\,\text{ज्या}^2\frac{\theta}{2}}} \text{ होगा।}$$

६१। दो छोटे छोटे छल्ले, जिनमें से प्रत्येक का भार W है, ऊर्ध्वाधर धरातल में दो दंडों पर, एक छल्ला एक दंड पर और दूसरा दूसरे पर, सरकते हैं, और प्रत्येक दंड ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाता है। छल्ले एक दूसरे से एक बारीक स्थिति-स्थापक तार से, जिसकी वास्तविक लम्बाई $2a$ और स्थिति-स्थापन-मापक λ है, बँधे हुये हैं। प्रत्येक दंड और छल्ले के बीच का घर्षण-गुणक स्पज्या β है। यदि तार क्षैतिज हो, तो सिद्ध करो कि प्रत्येक छल्ला दंड के अतः खड जिसकी लम्बाई

$$W\lambda^{-1}a\,\text{व्युज्या}\,\alpha\,\{\text{कोस्पज्या}\,(\alpha-\beta)-\text{कोस्पज्या}\,(\alpha+\beta)\}$$

है, के किसी भी विन्दु पर ठहर सकता है।

६२। एक टंक, जिसका कोण 60° है, एक चिकनी मेज़ पर रखा हुआ है, और उसके तिरछे पृष्ठ पर 20 पौं० का एक भार उस पृष्ठ पर पड़ी हुई डोरी से सम्हाला जाता है। डोरी टक के शिखर के एक चिकने छल्ले के भीतर से जाती हुई ऊर्ध्वाधर लटकते हुये भार W को सम्हाले हुये है। W का परिमाण मालूम करो।

वह क्षैतिज बल भी मालूम करो जो टंक को समतुलित रख सके

(१) जब छल्ला टक से न लगा हो,

(२) जब छल्ला टंक से लगा हो।

इस प्रश्न को टंक का तिरछा पृष्ठ रूक्ष, घर्षक-गुणक $\frac{1}{\sqrt{3}}$ और 20 पौं० का भार नीचे फिसलने की सीमा पर मान कर भी हल करो।

६३। सिद्ध करो कि वह सामर्थ्य, जो एक वेलन को, जिसकी त्रिज्या r और भार W है, एक चिकने आनत धरातल पर, जिसका क्षैतिज से झुकाव α है, एक क्रोबार, जिसकी लम्बाई l है और जिसका क्षैतिज से झुकाव β है, की सहायता से फिसला सकती है

$$\frac{Wr}{l} \frac{\text{ज्या } \alpha}{1+\text{कोज्या } (\alpha+\beta)} \text{ होगी।}$$

६४। एक चिट्ठी तौलने वाली मशीन में एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज ABC के आकार की एक सम प्लेट लगी है। प्लेट का भार 3 औंस है, और वह एक नियत बिन्दु से जिसमे कि एक गुनिया (साहुल-सूत्र) भी लटकी हुई है, समकोण C पर से लटकाया गया है। चिट्ठियाँ कोण A से लटकाई जाती है और उनका भार AB पर लगे हुये अंशांकित पटरी, जिस पर 1 औं०, 2 औं०, 3 औं० इत्यादि भाग चिन्हित हैं, को जहाँ गुनिया काटती है, उस स्थान द्वारा पढ़े जाते है। सिद्ध करो कि पटरी पर अशो की A से दूरियाँ हरात्मक श्रेणी मे है।

६५। दो आदमी A और B, एक सीढ़ी को, जो हर प्रकार से सम है और जिसकी लम्बाई l और भार W है, क्षैतिज अवस्था में ऊर्ध्वाधर अवस्था मे उठाते है। A एक सिरे पर खड़ा होता है और B, सीढ़ी के नीचे जाकर दूसरे सिरे से सीढ़ी के उत्तरोत्तर बिन्दुओं को अपने सिर के ऊपर भूमि से d फुट की ऊँचाई पर पकड़ता हुआ A की ओर बढता है। जिस बल का वह प्रयोग करता है वह ऊर्ध्वाधर रहता है। बताओ इस प्रकार A से n फुट की दूरी के एक बिन्दु पर सीढ़ी को रोकने मे B किस बल का प्रयोग करता है, और सिद्ध करो n वे फुट से $(n-1)$ वे फुट तक जाने में जो कर्म उसने किया वह $\frac{Wld}{2n(n-1)}$ है।

बताओ A को अपने पैरों से सीढ़ी के सिरो को नीचे की ओर कब दबाना चाहिये।

६६। सिद्ध करो कि किसी मेज की साधारण किश्ती उसके एक दस्ते पर वल लगा कर भीतर की ओर नही ढकेली जा सकती जबतक उसे $a.\mu$ दूरी तक किसी दूसरी रीति से वल लगा कर न ढकेल दिया जाय, जहाँ पर a दस्तों के बीच की दूरी है और μ घर्षण-गुणक है।

६७। तीन बरावर सम दडों के सिरे का, भार जिनमें मे प्रत्येक W है, इस प्रकार कब्जों द्वारा जुड़े हुये है कि उनसे एक समत्रिबाहु त्रिभुज बन जाता है। त्रिभुज इस प्रकार क्षैतिज अवस्था में रखा हुआ है कि प्रत्येक दंड एक चिकने शंकु को स्पर्श करता है जिसका अर्द्ध-शीर्ष कोण a और अक्ष ऊर्ध्वाधर है। सिद्ध करो कि प्रत्येक कब्जे पर क्रिया $\dfrac{W \text{ कोस्पज्या } a}{\sqrt{3}}$ है।

६८। एक चरखी, जिस पर एक धुरी है जिसके दो वृत्तीय सिरे है, एक रूक्ष आनत धरातल पर रखी हुई है और एक तागा उससे लिपटा हुआ है जो खुलता जाता है और चरखी नीचे की ओर लुढ़कती जाती है। धुरी की त्रिज्या c और वृत्तीय सिरों की त्रिज्यायें a है। यदि घर्षण-गुणक μ और आनत धरातल का क्षैतिज से झुकाव a हो, तो सिद्ध करो कि चरखी तागे मे धरातल के ऊपर खीची जा सकती है यदि μ, $\dfrac{c \text{ ज्या } a}{a-c \text{ कोज्या } a}$ से कम न हो।

६९। किसी सम चतुर्भुज $ABCD$ के गुरुत्व-केन्द्र की निम्नलिखित ज्यामितीय रचना को सिद्ध करो :

त्रिभुज ABD और CBD के गुरुत्व-केन्द्र X और Y मालूम करो ; मान लो XY, BD को U पर मिलती है ; तो इष्ट गुरुत्व-केन्द्र XY पर इस प्रकार बिन्दु का G होगा कि $YG=XU$।

७०। एक दरवाजे के पेंदे और फ़र्श के बीच में थोड़ा सा अन्तर है, और एक बिना भार का टंक इस स्थान में ढकेला गया है। दरवाजे के आधार

और फ़र्श के बीच का घर्षण-गुणक ज्ञात हैं। यदि टंक का कोण किसी परिमाण से कम हो और उसकी तिरछी कोर चिकनी हो, तो सिद्ध करो कि कोई भी बल दरवाजे को नही खोल सकता हैं।

७१। एक नियत रूक्ष बेलन के ऊपर, जिसकी त्रिज्या r हैं, एक पतला सम तख़्ता रखा हुआ हैं, और एक आदमी तख्ते पर ठीक स्पर्श-बिन्दु के ऊपर खड़ा हुआ हैं। सिद्ध करो कि वह $(n+1)r\epsilon$ की दूरी तक धीरे धीरे तख्ते को बेलन पर बिना फिसलाये हुये ही चल सकता हैं, जहाँ तख्ते का भार आदमी के भार से n गुना और ϵ तख्ते और बेलन के बीच का घर्षण-कोण हैं।

७२। एक छल्ला एक रूक्ष आनत धरातल पर एक ऊर्ध्वाधर धरातल में जो उसे महत्तम ढाल-रेखा में काटता हैं, खड़ा हुआ हैं। उसे एक डोरी, जिसका एक सिरा छल्ले की परिधि पर एक बिन्दु से बँधा हुआ हैं और जो उसके चारो ओर लिपटी हुई उसी धरातल में आनत तल के ऊपर की ओर एक खूँटी से बँधी हुई है, समतुलित अवस्था में रखे हुये हैं। यदि λ घर्षण-कोण हैं, θ वह कोण हैं जो छल्ला खूँटी पर बनाता है, और α धरातल का झुकाव हैं, तो सिद्ध करो कि यह स्थिति सीमान्त होगी जब $\theta = \alpha + \text{कोज्या}^{-1}\left[\frac{\text{ज्या}\,(\alpha-\lambda)}{\text{ज्या}\,\lambda}\right]$। यदि θ का मान इससे बड़ा हो तो क्या होगा ?

७३। सिद्ध करो कि वह लघुतम बल, जिसे यदि एक भारी सम गोले के पृष्ठ पर लगाये तो वह एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे ठीक समतुलित अवस्था में हो जाता हैं,

$$W\,\text{कोज्या}\,\epsilon \text{ अथवा } W\,\text{स्पज्या}\,\epsilon[\text{स्पज्या}\,\epsilon-\sqrt{\text{स्पज्या}^2\epsilon-1}]$$

हैं, यदि $\epsilon <$ अथवा $>$ कोज्या$^{-1}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, जहाँ पर W भार और ϵ घर्षण-कोण हैं।

७४। एक सम दंड, जिसका भार W हैं, एक सिरे पर कब्ज़े के

चारों ओर स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकता है, और उसका दूसरा सिरा एक रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे दीवार से कोण α बनाता हुआ रखा हुआ है। सिद्ध करो कि यह सिरा एक वृत्त के चाप पर, जिसका कोण 2 स्पज्या $^{-1}$ [μ स्पज्या α] है, कहीं भी रखा जा सकता है, और दोनों अन्तिम अवस्थाओं में दीवार पर दबाव $\frac{1}{2}W$ [कोस्पज्या$^2\alpha+\mu^2$]$^{-\frac{1}{2}}$ होगा, जहाँ μ घर्षण-गुणक है ।

७५। यदि सम घनत्व के एक ठोस अर्द्ध-गोले में से बड़े से बड़े घन काट लिया जाय, तो सिद्ध करो कि शेष पिंड अपने वक्र पृष्ठ के सहारे एक पूर्णतया रूक्ष आनत धरातल पर समतुलित रह सकता है यदि उसका आधार क्षैतिज से कोण ज्या$^{-1}$ $\left[\frac{8(3\pi-\sqrt{6})}{9\pi-8}\right.$ ज्या $\left.\alpha\right]$ बनाये, जहाँ पर α आनत तल का झुकाव है ।

७६। एक बेलनाकार डाट, जिसकी लम्बाई l और त्रिज्या r है, धीरे धीरे एक बोतल की गर्दन से बाहर निकाली जा रही है। यदि बोतल और डाट के बिना बाहर निकाले हुये भाग के बीच के क्षेत्र की प्रति इकाई पर अभिलम्ब दबाव किसी भी समय स्थिर और P के बराबर हों, तो सिद्ध करो कि यदि μ घर्षण-गुणक है, तो डाट के निकालने में $\pi\mu r l^2 P$ कर्म करना पड़ेगा ।

उत्तरमाला

उदाहरणमाला १ (पृष्ठ १७)

१। (१) 25 ; (२) $3\sqrt{3}$; (३) 13 ; (४) $\sqrt{61}$; (५) 60° ; (६) 15 अथवा $\sqrt{505}$; (७) 3।

२। 20 पौं० भार ; 4 पौं० भार।

३। $\sqrt{2}$ पौं० भार दक्षिण-पश्चिम दिशा में।

४। 205 पौं० भार। ५। P पौं० भार पहले अवयव बल पर लम्ब।

६। 2 पौं० भार। ७। 20 पौं० भार। ८। 17 पौ० भार।

९। 60°। १०। 3 पौं० भार ; 1 पौ० भार।

११। (१) 120°, (२) कोज्या$^{-1}\left(-\frac{7}{8}\right)$, अर्थात् 151°3'।

१२। कोज्या$^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}\right)$।

१३। दोनों दिये हुये बलों के परिणामीबल की दिशा में।

१४। (१) 2.38 ; (२) 6.64 ; (३) 68°12' ; (४) 2.56।

उदाहरणमाला २ (पृष्ठ २२)

१। $5\sqrt{3}$ और 5 पौं० भार। २। (१) $\frac{1}{2}P\sqrt{2}$; (२) $\frac{1}{13}P$।

३। 50 पौं० भार।

४। प्रत्येक बल $\frac{1}{3}\,100\sqrt{3}$, अर्थात् 57·735 पौ० भार के बराबर है।

५। 36.603 और 44·83 पौ० भार लगभग।

६। $P(\sqrt{3}-1)$ और $\frac{P}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, अर्थात् $P\times{\cdot}732$ और $P\times{\cdot}5176$।

८। $F\sqrt{3}$ और $2F$। ९। $F\sqrt{2}$ दूसरे अवयव बल से 135° पर।

१०। $10\sqrt{5}$ ऊर्ध्वाधर से स्पज्या$^{-1}\frac{1}{2}$ (अर्थात् 22.36, 26°34' पर) कोण बनाता है।

११। 33·62 पौं० भार ; 51·8 पौं० भार।

उदाहरणमाला ३ (पृष्ठ २९)

१। $1:1:\sqrt{3}$। २। $\sqrt{3}.1:2$। ३। 120°।

४। 90°, 112°37′(=180°—कोज्या$^{-1}$ $\frac{5}{13}$), और 157°23′।

९। R_1=34·4 पौं० भार, α_1=81° ; R_2=6·5 पौं० भार, α_2=169°।

१०। $101\frac{1}{2}$° ; 57°। ११। 52 ; 95°। १२। 67·2 ; 101।

१३। 46 ; 138°। १४। 2·96, 14°। १५। 2·66 हन्डरवेट।

उदाहरणमाला ४ (पृष्ठ ३१)

१। 40। २। कोज्या$^{-1}$(—$\frac{1}{4}$) अर्थात् 104°29′।

३। $2\sqrt{3}$ और $\sqrt{3}$ पौं० भार।

४। $15\sqrt{3}$ और 15 पौं० भार। ५। 5 : 4। ६। 5 और 13।

९। 12 पौं० भार।

१६। सरल रेखा C और AB के मध्य-विन्दु से जाती है।

१९। इष्ट बिन्दु विकर्णों के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को समविभाजित करता है।

२०। B से BL, AC के समानान्तर खीचो जो CD को L पर मिले ; DL को X पर समविभाजित करो ; परिणामीबल X से AD के समानान्तर और उससे दुगने बल के बराबर है।

उदाहरणमाला ५ (पृष्ठ ४०)

१। 4 पौं० भार AQ दिशा में।

२। $\sqrt{50+30\sqrt{2}}$ अर्थात् 9·76 पौं० भार पहले बल से स्पज्या$^{-1}$ $\frac{7+4\sqrt{2}}{17}$ अर्थात् 36° 40′ कोण पर।

३। $2P$ बीच के बल की दिशा में।

४। $7P$, तीसरे बल से कोज्या $^{-1}\frac{11}{14}$ अर्थात् 38°13′ का कोण बनाते हुये।

५। $\sqrt{3}P$, तीसरे बल से 30° का कोण बनाते हुये।

६। 12·31, AB से स्पज्या $^{-1}5$ अर्थात् 78°41′ का कोण बनाते हुये।

७। 14·24 पौं० भार।

८। 5 पौ० भार, दूसरे बल की विपरीत दिशा में।

९। $\frac{1}{2}P(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, Q और R के बीच के कोण को समविभाजित करते हुये।

१०। 10 पौं० भार सम्मुख के शीर्षबिन्दु की ओर।

११। $\sqrt{125+68\sqrt{3}}$ पौं० भार, पहले बल से कोण स्पज्या $^{-1}\frac{64+19\sqrt{3}}{23}$, अर्थात् 15·58 पौं० भार कोण 76°39′ बनाते हुये।

१३। $P\times5·027$ अष्टभुज के सम्मुख शीर्ष की ओर।

१४। 17·79 पौं० भार नियत रेखा से 66° 29′ का कोण बनाते हुये।

१५। 9·40 पौं० भार नियत रेखा से 39° 45′ का कोण बनाते हुये।

१६। 39·50 पौं० भार नियत रेखा से 111° 46′ का कोण बनाते हुये।

१७। 42·5 कीलोग्राम भार, OA से 30° का कोण बनाते हुये।

उदाहरणमाला ६ (पृष्ठ ४७)

१। $\frac{W}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $W(\sqrt{3}-1)$।

२। $2\frac{2}{3}$ और $3\frac{1}{3}$ पौं० भार। ३। 126 और 32 पौं० भार।

४। 56 और 42 पौं० भार। ५। 48 और 36 पौ० भार।

६। 4, 8 और 12 पौ० भार। ७। W।

८। 120 पौं० भार।

९। डोरी ऊर्ध्वाधर से 60° का कोण बनाती है और दबाव $W\sqrt{3}$ है।

१०। 7·23 पौं० भार। ११। भार बराबर है।

१२। 1 34 इंच। १३। $2\frac{4}{5}$ और $9\frac{3}{5}$ पौं० भार।

१४। 14 पौं० भार। १५। 6 फ़ुट 5 इंच ; 2 फ़ुट 4 इंच।

१६। प्रत्येक पिंड के भार के बराबर है।

१८। $2P$ कोज्या $\frac{\alpha}{2}$, जहाँ पर α लगाम के दोनों भागों के बीच का कोण है।

२०। $\frac{W}{2}$ व्युकोज्या $\frac{C}{2}$। २२। W; $W\sqrt{2}$।

उदाहरणमाला ७ (पृष्ठ ५६)

१। 42 9 पौं० भार ; 19·91 पौं० भार।

२। $1\frac{1}{3}$ और $1\frac{2}{3}$ टन भार।

३। 37 8 और 85·1 पौं० भार। ४। 15·2 पौं०।

५। 3·4, 6 6, 3 67, 7·55, और 5 हन्डरवेट क्रम से।

६। 160 पौं० और 120 पौं० भार ; 128 पौं० और 72 पौं० भार।

७। 20 हन्डरवेट और 6 हन्डरवेट।

८। 244 84 और 561·34 पौं० भार।

९। 2·73 और ·93 टन भार।

१०। (१) 3, $1\frac{1}{3}$ और 1 टन भार ; (२) 2, $\frac{1}{3}$ और 1 टन भार।

११। AC में 5·01 टन भार का दबाव और CD में 1·79 टन भार का खिंचाव।

उदाहरणमाला ८ (पृष्ठ ६९)

१। (१) $R=11$, $AC=7$ इंच ; (२) $R=30$, $AC=1$ फ़ुट 7 इंच ; (३) $R=10$, $AC=1$ फुट 6 इंच।

२। (१) $R=8$, $AC=25$ इंच ; (२) $R=8$, $AC=-75$ इंच; (३) $R=17$, $AC=-19\frac{1}{17}$ इंच।

३। (१) $Q=9$, $AB=8\frac{1}{2}$ इंच ; (२) $P=2\frac{3}{4}$, $R=13\frac{3}{4}$; (३) $Q=6\frac{3}{4}$, $R=12\frac{3}{4}$।

४। (१) $Q=25$, $AB=3\frac{3}{50}$ इन्च; (२) $P=24\frac{3}{4}$, $R=13\frac{3}{4}$; (३) $Q=2\frac{4}{7}$, $R=3\frac{3}{7}$ ।

५। 15 और 5 पौं० भार।

६। $43\frac{1}{3}$ और $13\frac{1}{3}$ पौं० भार। ८। 98 और 70 पौं० भार।

९। अधिक बलवान आदमी से गुटका 2 फ़ुट दूर होना चाहिये।

१०। 4 फुट 3 इंच। ११। 1 पौं० भार। १२। 1 फुट।

१३। 20 पौं० ; 4 इन्च ; 8 इन्च। १४। $14\frac{3}{8}$ इंच ; $10\frac{5}{8}$ इन्च।

१६। 40 और 35 पौं० भार। १७। $\frac{1}{2}W$।

१८। बल हाथ और कधे की दूरी के व्युत्क्रम अनुपात मे परिणमित होता है।

१९। (१) 100 और 150 पौं० भार, (२) 50 और 100 पौं० भार ; (३) 25 और 75 पौं० भार।

२०। 1 पौं० भार पहले से 5 फुट पर।

२१। 77·55 और 34·45 पौं० भार लगभग।

उदाहरणमाला ९ (पृष्ठ ८७)

१। 101। २। $5\sqrt{3}$ फ़ुट-पौं०।

३। $75\sqrt{3}=129\ 9$ पौं० भार। ४। 6 पौं० भार से 3 फुट 8 इन्च।

५। 20 पौं० भार से 6 6 फुट की दूरी पर।

६। सिरे से $2\frac{6}{7}$ फुट। ७। $2\frac{2}{3}$ पौं०। ८। $2\frac{1}{3}$ पौं०।

९। (१) प्रत्येक 4 टन भार ; (२) $4\frac{1}{3}$ टन भार, $3\frac{2}{3}$ टन भार।

१०। B खूंटी से 3 इंच है। ११। $\frac{6}{7}$ हन्डरवेट।

१२। छड़ की लम्बाई की एक चौथाई। १३। 55 पौं० भार।

१४। भार $3\frac{1}{2}$ पौं० है और बिन्दु 5 पौं० भार से $8\frac{1}{3}$ इंच दूर है।

१५। 3 औंस। १६। $85\frac{1}{2}$, $85\frac{1}{2}$ और 29 पौं० भार।

१७। 96, 96 और 46 पौं० भार। १८। धुरी से $1\frac{17}{28}$ इन्च।

१९। $2\sqrt{2}$ पौं० भार, CA के समानान्तर, AD को P पर काटता हुआ,

जहाँ पर $AP=\frac{8}{9} AD$ । २० । $2P$, DC पर कार्य करता हुआ ।

२१ । परिणामीबल AC के समानान्तर है और AD को P पर काटता है, जहाँ पर $AP=\frac{2}{3}$ फुट ।

२२ । $20\sqrt{5}$ पौं० भार, AB और AD को A से क्रमशः 8 फुट और 16 फुट की दूरी पर काटता हुआ ।

२३ । $P\sqrt{3}$, BC पर लम्ब है और उसे Q पर काटता है जहाँ पर $BQ=\frac{8}{9} BC$ ।

२९ । इष्ट ऊँचाई $\frac{1}{2} l\sqrt{2}$ है, जहाँ पर l रस्सी की लम्बाई है ।

३१ । सरल रेखा जो दोनों बलों के बीच के बाह्य-कोण को ऐसे दो कोणों में विभाजित करती है जिनकी ज्याओं की व्युत्क्रम-निष्पत्ति बलों की निष्पत्ति के बराबर है । ३३ । 225 पौं० भार ।

उदाहरणमाला १० (पृष्ठ ९७)

२ । 9 फुट-पौं० । ३ । 6 ।

४ । C पर कार्य करने वाले बल के बराबर, समानान्तर और विपरीत दिशा में AC के इस प्रकार के बिन्दु C' पर कि $CC'=\frac{8}{9} AB$, कार्य करता हुआ ।

उदाहरणमाला ११ (पृष्ठ ११४)

२ । 45° । ३ । $10\sqrt{2}$ और 10 पौं० भार ।

४ । डोरी की लम्बाई AC के बराबर है । ५ । $\frac{2}{3}W\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}W\sqrt{3}$ ।

८ । $\frac{a}{l}<1$ और $>\frac{1}{2}$. १२ । $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ और $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ पौं० भार ।

१४ । W व्युज्या α और W कोस्पज्या α । १५ । $\frac{1}{3}W\sqrt{3}$ ।

१६ । 30°; $\frac{2}{3}W\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}W\sqrt{3}$ । १७ । $\sqrt{7}:2\sqrt{3}$ ।

१८ । $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ पौं० भार । १९ । $6\frac{2}{3}$ पौं० भार ।

२१ । $h\sqrt{h^2+a^2 \text{ ज्या}^2 \alpha}/(h+a \text{ कोज्या } \alpha)$, जहाँ पर $2a$ तस्वीर की ऊँचाई है ।

२२। प्रतिबल $\frac{b}{a+b}\frac{r}{\sqrt{r^2-ab}}W$ और $\frac{a}{a+b}\frac{r}{\sqrt{r^2-ab}}W$ है।

२५। 3·16 फुट ; 133 और 118·8 पौं० भार।

२६। 15·5 पौं० भार। २७। 6·75 और 16·6 पौं० भार।

२८। 2·83 और 3·61 हन्डरवेट।

२९। 26.8 और 32·1 पौं० भार।

उदाहरणमाला १२ (पृष्ठ १३३)

१। $\frac{1}{4}W\sqrt{3}$। २। $\frac{1}{6}W\sqrt{3}$।

४। $\frac{1}{3}W$ कोस्पज्या α; $\frac{5}{6}W$ कोस्पज्या α।

६। $\frac{W \text{ ज्या } \beta}{\text{ज्या }(\alpha+\beta)}$; $\frac{W \text{ ज्या } \alpha}{\text{ज्या }(\alpha+\beta)}$,

$$\text{स्पज्या}^{-1}\left(\frac{\text{कोस्पज्या }\beta-\text{कोस्पज्या }\alpha}{2}\right)।$$

८। $\frac{3}{5}$ पौं० भार। ११। $AC=a$; तनाव $=2W\sqrt{3}$।

१४। सिरे और आधार पर प्रतिबल क्रम से लगभग 3.24 और 4.8 पौं० भार है।

१५। $\frac{W.r}{2\sqrt{R^2-r^2}}$। १८। $W\frac{a}{b}$। २३। $\frac{1}{8}W\sqrt{6}$।

२४। $133\frac{1}{3}$ और $166\frac{2}{3}$ पौं० भार। २६। $17\frac{11}{36}$ और $\frac{25}{36}$ पौं० भार।

२७। 20 पौं० भार।

उदाहरणमाला १३ (पृष्ठ १४२)

१। बल $4\sqrt{2}$ पौं० भार के बराबर है और तीसरे बल से 45° का कोण बनाता है, और बलयुग्म का घूर्ण $10a$ है जहाँ a वर्ग की भुजा है।

२। बल $5P\sqrt{2}$ के बराबर है और DB के समानान्तर है, और बलयुग्म का घूर्ण $3Pa$ है, जहाँ a वर्ग की भुजा है।

३। बल 6 पौं० भार के बराबर है और CB के समानान्तर है, और बलयुग्म का घूर्ण $\frac{21\sqrt{3}a}{2}$ है, जहां a षट्भुज की भुजा है।

उदाहरणमाला १४ (पृष्ठ १४७)

१। भुजा क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}$ 2 बनाती है। २। $15a$।

३। $(n+2)\sqrt{b^2+c^2}$। ४। एक भार जो मेज के भार के बराबर है। ६। 10 पौं०।

७। केन्द्र को उस पाये से मिलाने वाली रेखा पर जो टूटे हुये पाये के सम्मुख है, और केन्द्र से वर्ग के विकर्ण की एक तिहाई दूरी पर।

८। 120 पौं०। ९। ज्या$^{-1}$ $\frac{p}{p+w}$।

११। A पर दबाव $W\frac{\text{कोज्या} A}{2 \text{ ज्या} B \text{ ज्या} C}$ है।

उदाहरणमाला १५ (पृष्ठ १५९)

१। $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$ और $1\frac{2}{3}$ फुट। २। 2, $2\frac{2}{3}$ और $1\frac{2}{3}$ फुट।

३। $2\sqrt{5}$, 3 और 3 इंच। ६। त्रिभुज के विन्दु A पर दबाव $\frac{w}{3}+W\frac{a}{c \text{ ज्या } \beta}$ है, जहां पर a भार W की BC भुजा से लम्ब दूरी है।

१०। 60°। १२। कोज्या$^{-1}$ $\frac{7}{25}$ अर्थात् 73°44′।

उदाहरणमाला १६ (पृष्ठ १६३)

१। सिरे से $4\frac{4}{5}$ इंच। २। सिरे से 15 इंच।

३। $2\frac{5}{9}$ फुट। ४। बीच में $\frac{20}{21}$ इंच।

५। पहले कण से $7\frac{1}{3}$ इंच। ६। दोनों किनारे के भारों के बीच की दूरी को 7:2 की निष्पत्ति में विभाजित करता है। ७। 5:1।

८। 1·335...फुट।

९। $\frac{2n}{3}$ इंच। १०। 12 पौ० ; दंड का मध्य-बिन्दु।

उदाहरणमाला १७ (पृष्ठ १६९)

१। वर्ग की भुजा का पाँचवा भाग। २। AB से $\frac{3a}{4}$; AD से $\frac{a}{4}$।

३। उस बिन्दु पर जिसकी AB और AD से दूरियाँ, क्रमश: 16 और 5 इंच है। ४। $7\frac{1}{3}$ और $8\frac{1}{3}$ इंच।

५। $\frac{a}{6}\sqrt{19}$; $\frac{a}{30}\sqrt{283}$। ७। पटल के गुरुत्व-केन्द्र पर।

८। $8\frac{1}{3}$ और $11\frac{1}{3}$ इंच। १०। 2:1:1

१२। उस बिन्दु पर जिसकी BC और CA से दूरियाँ क्रमश. इन रेखाओं से A और B की दूरियों की $\frac{3}{13}$ वें और $\frac{4}{13}$ वें पर है।

१४। वह केन्द्र से पाँचवे भार को मिलाने वाली रेखा को 5:9 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१८। वर्ग की भुजा का चौथाई। २०। A से $4\frac{1}{3}$ इंच।

२१। वह अन्त: वृत्त के केन्द्र से जाता है।

उदाहरणमाला १८ (पृष्ठ १७५)

१। जोड़ से $2\frac{3}{31}$ इंच। २। चित्र के नीचे के सिरे से $5\frac{7}{8}$ इंच।

३। वह छड़ को 5:11 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

४। त्रिभुज के आधार के केन्द्र पर। ५। $7\frac{8}{15}$ इंच।

७। बड़े गोले के केन्द्र से एक इंच। ८। उसकी दूरी समान्तरचतुर्भुज के केन्द्र से भुजा के नवें भाग के बराबर है।

९। केन्द्र से दूरी विकर्ण के बारहवें भाग के बराबर है।

१०। केन्द्र से दूरी वर्ग के विकर्ण के $\frac{1}{21}$ वें भाग के बराबर है।

११। वह सम्मुख की समानान्तर भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को 5:7 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१३। O से $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ इंच। १४। $\frac{5a}{18}$।

१५। A', AD को समविभाजित करता है, जहाँ पर D, BC का मध्य-बिन्दु है।

१६। वह GA को $\sqrt{m}-1:m\sqrt{m}-3\sqrt{m}+1$ की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१७। त्रिभुज की ऊँचाई वर्ग की भुजा की $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ अर्थात् ·634 है।

१८। केन्द्र से $\frac{15}{194}$ इंच। १९। सूराख का केन्द्र मंडल के केन्द्र से 16 इंच होना चाहिये।

२०। बड़े गोले के केन्द्र से $\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$ दूर।

२१। $\frac{45}{56}h$, जहाँ पर h शंकु की ऊँचाई है। २२। 13 532 इंच।

२३। खोखला किये हुये भाग की ऊँचाई x, शंकु की ऊँचाई की एक तिहाई है। २४। 3080 मील लगभग।

उदाहरणमाला १९ (पृष्ठ १८०)

१। क्रमश. 7, 8 और 9 पौं० भारों से। २। $1\frac{7}{10}$ इंच।

६। 5:4। १०। त्रिभुज के गुरुत्व-केन्द्र पर।

१४। 2 ज्या$^{-1}\frac{1}{3}$। १५। $\sqrt{6}:1$।

१६। शंकु की ऊँचाई और बेलन की ऊँचाई में $2-\sqrt{2}:1$ अर्थात् ·5858:1 की निष्पत्ति होनी चाहिये।

१९। वह मौलिक शंकु के अक्ष को 3:5 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

उदाहरणमाला २० (पृष्ठ १९६)

१। $6\frac{3}{8}$ इंच। २। $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ इंच। ४। $\frac{H'}{6}$।

७। 120; $\frac{1}{120}$ वाँ। ८। 18, यदि वे अपनी लम्बाइयों की

दिशा मे एक दूसरे के ऊपर होते हैं और 8, यदि वे अपनी चौड़ाइयों की दिशा में एक दूसरे के ऊपर होते हैं।

११। अर्द्ध-गोले की त्रिज्या का $\sqrt{3}$ गुना।

१२। $1:\sqrt{2}$। १४। $4r$।

१८। डोरी धरातल से कोण कोज्या$^{-1}\left(\frac{W \text{ ज्या } a}{P}\right)$ बनाती है जहाँ उसका क्षैतिज से झुकाव a है ; सस्थिति स्थाई है।

१९। नियत विन्दु से केन्द्र को मिलाने वाली रेखा ऊर्ध्वाधर मे कोण ज्या$^{-1}\left[\frac{W-w}{p+W+w}\frac{r}{c}\right]$ बनाती है ; संस्थिति स्थायी है।

उदाहरणमाला २१ (पृष्ठ २०६)

१। (१) $168\frac{3}{4}$ फ़ुट–टन; (२) $117\frac{6}{7}$ फुट–टन।

२। 1000 फ़ुट। ३। 6×10^7 फ़ुट–पौं०। ४। 21120।

५। $9\frac{27}{32}$ घण्टे। ६। $8\frac{13}{14}$। ७। $71\frac{1}{44}$ मिनट।

९। 4·4352। १०। 660,000 फुट–पौं०, 30 अश्व-सामर्थ्य।

११। $111\frac{17}{38}$ टन भार। १३। 176 फुट–पौं०; ·213 अश्व-सामर्थ्य।

२४। 24 2...फुट–पौं० ; $\frac{5}{192}n(n+1)$ फ़ुट–पौं०।

१६। 3 फुट–पौं०। १८। 166 फुट–पौं०।

उदाहरणमाला २२ (पृष्ठ २१७)

१। 5 फुट। २। पहले भार से 4 फुट ; पहले भार की ओर।

३। 11:9। ४। 2 पौं०। ६। 4 पौं०।

७। $9\frac{4}{5}$ पौं०। ८। 27 औं० से 6 इंच ; $1\frac{5}{7}$ इंच।

९। 1 फुट। १०। 360 स्टोन भार। ११। 21 पौं० भार।

१२। 15 पौं० भार। १३। $2\sqrt{2}$ लीवर मे 45° के कोण पर।

१४। 50 पौं० भार। १५। बडी भुजा क्षैतिज से कोण

स्पज्या$^{-1}\frac{7}{\sqrt{3}}$ बनाती है। १६। $8\frac{1}{3}$ पौं० भार। १९। 20 पौं०।

२०। $2\frac{1}{2}$ हन्डरवेट का भार। २१। $\frac{n}{6}(\sqrt{3}-1)a$।

उदाहरणमाला २३ (पृष्ठ २२६)

१। (१) 320; (२) 7; (३) 3।

२। (१) 7; (२) $45\frac{1}{2}$; (३) 7; (४) 6।

३। 390 पौं०। ४। $10\frac{3}{4}$ पौं०। ५। 5 पौं०।

७। 5 पौं०। ९। 49 पौं०; प्रत्येक का भार 1 पौं०।

१०। $4w$; $21w$। १२। $9\frac{15}{16}$ पौं० भार। १३। 18 पौं० भार।

उदाहरणमाला २४ (पृष्ठ २३०)

१। 6 पौं०। २। 4 डोरियां; 2 पौं०।

३'। 47 पौं०; 6 घिरनियां। ४। 7 डोरियां; 14 पौं०।

५। $\frac{W}{n+1}$, जहां डोरियों की संख्या n है; $\frac{W}{n-1}$।

६। 9 स्टोन भार। ७। रस्सी $2\frac{1}{4}$ टन सम्हाल सकेगी।

८। n। ९। 75 पौं०; $166\frac{2}{3}$ पौं०। १०। $1\frac{3}{32}$ हण्डरवेट।

उदाहणमाला २५ (पृष्ठ २३६)

१। (१) 30 पौं०; (२) 4 पौं०; (३) 4।

२। (१) 161 पौं० भार; (२) 16 पौं० भार; (३) $\frac{1}{2}$ पौं०; (४) 5।

३। 10 पौं० भार; भार पहली दो डोरियों के बीच की दूरी को 23 : 5 की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

४। सिरे से $1\frac{1}{16}$ इंच। ५। $18\frac{6}{13}$। ६। सिरे से $\frac{3}{4}$ इंच।

८। $W=7P+4w$; 8 औं०; 1 पौं० भार। ९। 4; 1050 पौं०।

१०। 4। १२। $W=P(2^n-1)+W'(2^{n-1}-1)$।

उदाहरणमाला २६ (पृष्ठ २४४)

१। 12 पौं० भार; 20 पौं० भार। २। $30^\circ; W\frac{\sqrt{3}}{2}$।

३। 103.92 पौं० भार। ५। $3:4; 2P$।

६। $\sqrt{3}:1$। ७। कोज्या$^{-1}$ $\frac{1}{16}$; धरातल से ज्या$^{-1}$ $\frac{1}{4}$।

८। $\frac{1}{\sqrt{3}}$ पौं० भार; $\frac{7}{\sqrt{3}}$ पौं० भार। ९। 6 पौं० भार।

११। $16\frac{1}{2}$ पौं०। १२। $\frac{\text{ज्या } \alpha}{\text{ज्या } \beta - \text{ज्या } \alpha}$ टन।

१४। विन्दु डोरी को 1: ज्या α की निष्पत्ति में विभाजित करता है।

१६। 17.374 पौं० भार, 46.884 पौं० भार।

१७। 10.318 पौं० भार; 12.208 पौं० भार।

१८। 16.12 पौं० भार; 34.056 पौं० भार।

उदाहरणमाला २७ (पृष्ठ २५२)

१। 7 पौं० भार। २। 120 पौं० भार; प्रत्येक पर 70 पौं० भार; $110\frac{10}{11}$ पौं० भार।

३। 20 इंच। ४। 7 फ़ुट। ५। $3\frac{4}{6}$ टन।

६। 3 पौं० भार। ७। 55 पौं०। ८। $23\frac{1}{3}$ पौं० भार।

९। $2\frac{1}{3}$ पौं० भार। १०। 360 पौं० ११। 120 पौं०।

१२। 1500 फुट पौं०। १३। 47040 फुट–पौं०; 2 हन्डरवेट; 210 फुट। १४। $\frac{2b}{c-a}; \frac{3R}{R-r}$।

उदाहरणमाला २८ (पृष्ठ २६२)

१। 11 पौं०। २। $26\frac{1}{4}$ पौं०। ३। 2 औं०।

४। 2:3; 6 पौं०। ५। 24.494 पौं०। ६। $5:\sqrt{26}$।

७। $\frac{5}{6}\sqrt{110}$ इंच; $\sqrt{110}$ पौं०। ९। 2 शि० 3 पें०; 1 शि० $9\frac{1}{3}$ पें०।

१०। उसको एक शिलिंग का घाटा रहेगा। १२। 10: $\sqrt{101}$; $\sqrt{101}$:10।

१३। $\frac{P-Q}{2}$; $\frac{P+Q}{2}$। १४। $w-P:P-w'$; $\frac{ww'-P^2}{P-w'}$।

१५। $P-\frac{(Q-R)^2}{P-Q}$। १६। 16 पौं०।

उदाहरणमाला २९ (पृष्ठ २६९)

१। आलम्ब से 34$\frac{5}{6}$ इंच। २। सिरे से 2 इंच; 1 इंच।

३। आलम्ब से 32 इंच। ४। $\frac{2}{3}$ इंच ; 4$\frac{1}{2}$ पौं०।

५। 4 इंच। ६। 16 पौं० ; भार के लटकने के विन्दु से 8 इंच दूर।

७। $\frac{2}{9}$ पौं० ; 1$\frac{8}{9}$ पौं०। ८। 26 पौ० ; 15 पौ० ; आलम्ब से 10 इंच।

९। 3 पौं०। १०। 15$\frac{7}{8}$ पौं० ; 6$\frac{7}{8}$ पौं० ; 4 इंच।

११। यह उस विन्दु से 10 इंच दूर है जहाँ भार लगा हुआ है।

१२। 3 औं०। १३। 30 इंच।

१५। क्योंकि मशीन पौण्डों को सूचित करने के लिये अंशांकित है, इसलिये जो भार वह वतलाती है, उनमें से प्रत्येक को एक पौण्ड का $\frac{1}{6}$ वाँ भाग बढा देना चाहिये।

१६। मशीन पर अंशांकित प्रत्येक अंक को $\frac{x}{y}\frac{W}{10}$ बढा देना चाहिये, जहाँ x और y मशीन के गुरुत्व-केन्द्र और सिरे की आलम्ब से दूरियाँ हैं, और W मशीन का भार है।

१७। वह अपने ग्राहक को धोखा देता है यदि वह सरकने वाले भार को घटाता है और स्वयं धोखा खाता है यदि वह सरकने वाले भार को बढ़ाता है।

उदाहरणमाला ३० (पृष्ठ २७८)

(निम्नलिखित उदाहरणों में π का मान $\frac{22}{7}$ लिया गया है।)

१। 4400 पौ०। २। 5$\frac{9}{11}$ इंच। ३। $\frac{22}{9}$ पौ० भार।

४। 1$\frac{69}{176}$ पौं० भार। ५। 4$\frac{32}{35}$ पौं० भार। ६। 13$\frac{3}{5}$ टन भार।

७। 6$\frac{3}{7}$ टन भार। ८। 50$\frac{10}{11}$ पौ० भार। ९। 4$\frac{32}{175}$ इंच।
१०। 4525$\frac{5}{7}$। ११। 5430$\frac{6}{7}$। १२। 4$\frac{1}{6}$ फुट-पौ०।

उदाहरणमाला ३१ (पृष्ठ २९४)

१। 10 पौं० भार ; 12$\frac{1}{2}$ पौं० भार, क्रमशः $10\sqrt{17}$ और $\frac{5}{2}\sqrt{17}$ पौं० भार क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}$4 बनाते हुये।

२। $\frac{P}{W}=\frac{\sqrt{2}}{3}=\cdot 4714.$

३। $10\sqrt{10}$ पौं० भार क्षैतिज से कोण स्पज्या$^{-1}$3 बनाते हुये।

६। $\frac{1}{4}$। ७। $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ पौं० भार। ९। $\frac{\sqrt{3}}{15}$।

१०। ज्या $\beta=$ ज्या $a+\mu$ कोज्या a।

११। स्पज्या$^{-1}$ $\left(\mu\frac{W_1+W_2}{W_1-W_2}\right)$, जहाँ W_1 और W_2 भार हैं।

१४। $a\times\cdot 134.$ १५। घर्षण-कोण के बराबर कोण पर।
१६। 2·19 हण्डरवेट। १७। 79·7 पौं० भार ; 32.

उदाहरणमाला ३२ (पृष्ठ ३०९)

१। 3808 फुट-पौं०। २। 7,392,000 फुट-पौ० ; 7$\frac{7}{15}$ अश्व-सामर्थ्य।

३। 23,040,000 फुट-पौ० ; 5$\frac{9}{11}$ अश्व-सामर्थ्य। ४। 7766.
६। 446. ७। ·11, ·34, और ·47 लगभग।
८। $a=4\cdot125$; $b=\cdot01125.$

(निम्न चार प्रश्नों के उत्तर केवल लगभग हैं।)

९। $a=5\cdot3$; $b=\cdot097.$

१०। $P=7\cdot3+\cdot236W$;

$$E=\frac{W}{36\cdot5+1\cdot18W}\ ;\ M=\frac{7\cdot3+\cdot236W}{W}\text{ ।}$$

११ । $P=4\,3+4{\cdot}7W$; 8 और 88

१२ । $P=18\,5+5\,5W$; ·59 और ·79

उदाहरणमाला ३३ (पृष्ठ ३१४)

१ । $11\frac{2}{3}$ पौ० भार । २ । 45° ।

५ । उस पर उसके मध्य-बिन्दु तक चढा जा सकता है ।

८ । 50 फुट , सीढी के भार का चौथाई ।

९ । $w\dfrac{2\mu-\text{स्पज्या }\alpha}{\text{स्पज्या }\alpha-\mu}$; यदि स्पज्या $\alpha>2\mu$, तो भार, ऋण होगा, अर्थात् समतुलित रखने के लिये सीढी को ऊपर की ओर खींचना पड़ेगा ; यदि स्पज्या $\alpha<\mu$, तो भी भार ऋण होगा, और समतुलित अवस्था सीमान्त होगी यदि सीढी ऊपर की ओर खींच ली जाय और इस अवस्था में उसके पाँव एक दूसरे की ओर फिसलने की सीमा पर होंगे ।

उदाहरणमाला ३४ (पृष्ठ ३१८)

१ । स्पज्या$^{-1}\frac{1}{2}$; ऊँचाई=व्यास का दुगना । ४ । 45° ।

६ । 2 स्पज्या$^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{12}$=2 स्पज्या$^{-1}$(·1443)=16°26′ । ८ । इकाई ।

उदाहरणमाला ३५ (पृष्ठ ३२४)

११ । $\dfrac{\sqrt{3}}{30}$=·0577. १· $\mu\left(\dfrac{W}{w}+1\right)\sqrt{b^2-a^2}$ । १८ । $\frac{7}{3}$ ।

२० । इष्ट बल $\frac{3}{4}W$ के बराबर है और महत्तम ढाल-रेखा से कोण कोज्या$^{-1}\frac{11}{14}$ बनाता है ।

२१ । महत्तम ढाल-रेखा से कोज्या$^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$(=15° 48′) के कोण पर ।

२४ । यदि μ कोस्पज्या α इकाई से बड़ी हो, तो समतुलन की कोई

सीमान्त अवस्था नहीं हो सकती, अर्थात् कण किसी भी अवस्था में ठहर सकता है।

२८। 60°।

उदाहरणमाला ३६ (पृष्ठ ३३५)

१। P पर, जहाँ $BP=\frac{1}{3}BC$; $\frac{3W}{2}$। ५। $\frac{W}{2}$ स्पज्या $\frac{ACB}{2}$।

७। $\frac{3W}{\sqrt{5}}$; $\frac{W}{5}\sqrt{10}$ क्षैतिज से स्पज्या $^{-1}\frac{1}{3}$ के कोण पर।

८। $\frac{W}{2}$; $\frac{3W}{2}$; $\frac{\sqrt{3}W}{4}$। १०। बीच के दंड के आधे के बराबर।

१२। दंडों के कुल भार का $\frac{1}{3}$ क्षैतिज दिशा में कार्य करता हुआ।

उदाहरणमाला ३७ (पृष्ठ ३४४)

६। $\frac{3}{8}$ फुट-पौ०। ७। $\frac{5}{8}$ फुट-पौ०।

उदाहरणमाला ३८ (पृष्ठ ३५४)

१। 39 पौ० भार ; 25·8 पौ० भार क्षैतिज से 1°40′ के कोण पर।

२। 152·3 और 267·96 पौ० भार। ३। ·41

४। 124° ; 103° ; 133°। ५। 26·9 पौ० भार।

६। 74 पौ० भार ; 12·7 पौ० भार।

७। 2·6 पौ० भार का बल जो उस रेखा पर कार्य करता है जो बढ़ाई हुई BC और AC को K और L बिन्दुओं में इस प्रकार मिलती है कि $CK=19{\cdot}25$ इंच, और $CL=17{\cdot}6$ इंच।

८। (१) $1\frac{1}{2}$ फुट ; (२) $7\frac{1}{2}$ फुट AB की विपरीत दिशा में।

९। सिरे से 3·9 फुट। १०। 7·15 पौं० भार और 6·85 पौं० भार।

११। 150,158·115, और 50 पौ० भार।

१३। प्रत्येक 10 हण्डरवेट भार के बराबर है।

१४। ·46; 91·2 और 57·2 पौ० भार।

१५। 58·1, 65·8, 37·4, 33·2, और 29 पौ० भार क्रम से।

२० । $T_1=13\cdot05$; $T_2=9\cdot79$; $T_3=3\cdot26$; $T_4=8\cdot39$, $T_5=5$ हण्डरवेट । T_4 और T_5 टाई हैं ; शेप स्ट्रट्म ।

२१ । $T_1=8\cdot39$; $T_2=11\cdot98$; $T_3=9\cdot62$; T_2 स्ट्रट है और T_1 और T_3 टाई है ।

२२ । 37·2, 47·5, और 43·1 हण्डरवेट ।

२३ । 6 टन और 2 टन , 5·77, 1·155, 1·155 और 3·464; इन अन्तिम चारों मे से पहला, तीसरा और चौथा स्ट्रट हैं और दूसरा टाई है ।

२४ । AB, BC, CD, DA के तनाव क्रमसे 32·4, 36·4, 16·8 और 25·5 पौं० भार हैं , BD पर दवाव 36·7 पौंड भार है ।

सरल विविध उदाहरणमाला (पृष्ठ ३८१)

१ । 15 पौ० भार दूसरे वल से कोण स्पज्या $^{-1}\frac{4}{3}$ बनाता हुआ ।

२ । प्रत्येक अवयव वल 57·735. पौं० भार हैं । ३ । 14·24 पौं० भार ।

४ । 50 और 86·6025...पौं० भार । ६ । 3 फुट ।

७ । 2 औं० । । A से $4\frac{1}{3}$ इंच । १० । $7\frac{1}{3}$ इंच ।

१२ । यह केन्द्र से सम्मुख की भुजा के मध्य-विन्दु को मिलाने वाली रेखा को 2:13 की निप्पत्ति में विभाजित करता है ।

१३ । पैनी के व्यास का $\frac{5}{6}$ । १४ । 8 और 12 पौं० भार ।

१५ । $9\frac{4}{5}$ पौं० भार । १६ । $W=P$ ।

१७ । इप्ट विन्दु दोनों सिरो की डोरियों के बीच की दूरी को 13:49 की निप्पत्ति में विभाजित करता है ।

१८ । $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ पौं० भार । २० । 18 इंच; 4 इंच । २१ । $26\frac{1}{3}$ ।

२२ । $\frac{2}{11}$ । २३ । वह पूरी लम्बाई चढ सकता है ।

२४ । $10\frac{935}{1348}$ ।

कठिन विविध उदाहरणमाला (पृष्ठ ३८४)

५ । अन्तः वृत्त का केन्द्र ।

६ । P, AD को $1:\sqrt{3}$ की निप्पत्ति में विभाजित करता है ।

९। बल समतुलित है। २१। [illegible] पौं० भार। २८। $\frac{l}{2}$।

३१। $W\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$, जहाँ a और b डाँडे की भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं और $AP=x$।

३९। दंड के मध्य-बिन्दु से $\sqrt{c^2+a^2}-a$ की दूरी पर, जहाँ पर $2c$ दंड की लम्बाई और a केन्द्र से दिये हुये बिन्दु की दूरी है।

४०। $\frac{\mu cW}{a \text{ ज्या } \theta+\mu c \text{ कोज्या } \theta}$, जहाँ पर W प्रत्येक कण का भार है।

४४। क्षैतिज से धरातलों के झुकाव के कोणों के बीच का अन्तर घर्षण-कोणों के योग से अधिक नहीं होना चाहिये।

४५। W कोज्या λ ज्या $(\alpha-\gamma)$ व्युज्या α, और W कोज्या λ ज्या λ व्युज्या α, जहाँ W दंड का भार है।

४८। पट्टी की गहराई की चौड़ाई से निष्पत्ति।

४९। $\sqrt{3}$ फुट। ५३। कण पहले चलेगा यदि $\mu W >$ $(1+\mu^2)\, w$ कोज्या α ज्या α, जहाँ α धरातल के फलक का झुकाव है।

५७। समतुलित अवस्था नष्ट हो जायगी।

५९। W स्पज्या i ; $\frac{W}{W+W'}$, स्पज्या i, जहाँ W' आनत तल का भार है।

६२। $W=10\sqrt{3}$; बल=(१) $5\sqrt{3}$ पौं० भार और (२) शून्य। $W=\frac{20\sqrt{3}}{3}$; बल=(१) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ पौं० भार और (२) शून्य।

६५। जब B आधी से अधिक सीढ़ी उठा ले, तो उसे नीचे की ओर दबाना चाहिये।